مقدمه ناشر

تا همین یکی دو سال قبل، مرسوم بود که تو مقدمهٔ کتاب‌های ریاضی انسانی دربارهٔ لزوم توجه دانش‌آموزای انسانی به درس ریاضی صحبت کنیم. رغبت دانش‌آموزا به این درس زیاد نبود. حق هم داشتن خب! روحیهٔ اغلب دانش‌آموزای انسانی، با دودوتا چهارتاهای ریاضی‌وار جور درنمی‌اومد. حتی بعضی افراد ـ که نمی‌خواستن نامشون فاش بشه! ـ می‌گفتن بعضی از بچه‌های انسانی کلاً درس ریاضی رو بی‌خیال می‌شن و توی کنکور، تست ریاضی رو «شتر دیدی ندیدی»طور، می‌پیچونن.

اما تو این چندتا کنکور اخیر ورق کاملاً برگشته. اولاً سطح دانش‌آموزای انسانی سال‌به‌سال داره بالا می‌ره و رقابت بینشون سخت‌تر و پیچیده‌تر می‌شه، واسه همین دیگه از کنار هیچ درسی نمی‌شه ساده رد شد. ثانیاً درس ریاضی توی کنکور این‌قدر سخت شده که درصد خوب ازش گرفتن و جواب‌دادن حتی به یه دونه از تست‌هاش، می‌تونه توی تراز کنکورتون اثر زیادی داشته باشه. بنابراین، ریاضی این سال‌ها، دیگه ریاضیِ اون قدیم ندیما نیست که بشه براش وقت نذاشت، بی‌خیالش شد، باهاش قهر بود، بهش «اوکی، بای!» گفت، آنفالو و ریمووش کرد و ...

کتاب‌های جمع‌بندی خیلی‌سبز، همون‌طور که از اسمشون مشخصه، برای مرور و تسلط نهایی در دوران جمع‌بندی نوشته شدن. نوشتن کتاب جمع‌بندی برای ریاضی، کار سختی بود. از یه طرف تستای ریاضی تو کنکورای اخیر این‌قدر سخت شدن که اگه می‌خواستیم همه‌چیز رو عمقی و مفصل توضیح بدیم، باید ۵۰۰ صفحه کتاب می‌نوشتیم و شما هم ۹ ماه فقط برای جمع‌بندی وقت می‌ذاشتید! از طرف دیگه، هیچ مطلب مهم کنکوری‌ای هم نباید از قلم می‌افتاد و مرور دقیقی از مطالب براتون انجام می‌شد. برای انجام‌دادن این کار سخت، دست‌اندرکاران این کتاب خیلی زحمت کشیدن، جلسات متعددی برگزار شد بینمون، کلی ایده‌پردازی کردیم، کلی نوشتیم و خط زدیم، گاهی حتی رو یک صفحه کتاب ساعت‌ها بحث می‌کردیم. سختی نوشتن این کتاب، اگر از اون کتاب ۵۰۰صفحه‌ایه بیشتر نشده باشه، کم‌تر هم نبوده! خلاصه که فلفل نبین چه ریزه!

از مؤلف‌های عزیز کتاب تشکر می‌کنم که اصل این زحمت روی دوش اونا بود. هم ما خیلی اذیتشون کردیم و هم خودشون خیلی وقت و انرژی گذاشتن پای کار.

از ویراستارهای عزیزمون که تلاش کردن کتاب با کم‌ترین خطا آماده بشه ممنونم.

از سرکار خانم آرانی تشکر می‌کنم که مرحله‌به‌مرحله جلو رفتن کار رو پیگیری کردن.

و از دوستان عزیزمون در واحد تولید سپاس‌گزارم که برای آماده‌سازی کتاب حسابی تو زحمت افتادن.

به نام خدایی که با من است،
هرجا که باشم.

به کتاب جمع‌بندی ریاضی انسانی خوش اومدید!

تجربهٔ سال‌ها تدریس و تألیف نشون داده اغلب دانش‌آموزها چندتا چالش و دغدغهٔ کلی توی درس ریاضی دارند؛ مثلاً:

اســـــــــتاااااد ...

ـ کدوم بخش‌ها و مباحث مهم‌ترند؟!

ـ می‌شه مباحثی که توی کنکور خیلی تکرار شدند رو بگید؟!

ـ کلی تست زدیم، ولی بازم نتایج آزمون‌هامون خوب نمی‌شه، چرا؟!

ـ این راه حل‌هایی که شما می‌گید، از کجا به ذهنمون برسه؟!

...

توی این کتاب که شامل تمام مباحث دهم، یازدهم و دوازدهم ریاضی انسانی هستش، سعی کردیم به این سؤال‌ها جواب بدیم. بیایید با هم ویژگی‌های این کتاب رو ببینیم:

درس‌نامه: یه درس‌نامهٔ خلاصه و جمع‌وجور (اما کامل) براتون نوشتیم که توی اون به کمک کلی جدول و با تیپ‌بندی مباحث، ذهن شما رو منظم کنه و بهتون می‌گیم چه مباحثی مهم‌ترند!

سؤال‌ها: به کمک مهم‌ترین سؤال‌های کنکور + سؤال‌های تألیفی، نکات و مفاهیم پرتکرار رو براتون دسته‌بندی کردیم و شما رو با سبک فکری طراح‌های کنکور آشنا کردیم.

پاسخ‌نامه: پاسخ‌نامه‌های کاملاً تشریحی و کامل، به شما یاد می‌دیم چه‌طور حل کنید!

نقشهٔ راه: یکی از مهم‌ترین بخش‌های کتاب! به شما یاد می‌دیم که: چه‌طور شروع کنید، چه‌طور پیش برید و چه‌طور به جواب برسید.

در آخر تشکر می‌کنم از:

ـ همسر عزیزم که همیشه همراه و پشتوانهٔ من است.

ـ جناب آقای دکتر نصری عزیز، مدیر محترم انتشارات

ـ جناب آقای سعید احمدپور، مدیر تألیف کاربلد و حرفه‌ای این کتاب

ـ تیم خفن تألیف و تولید خیلی‌سبز که همیشه بهترین‌اند.

ـ محمدحسین صابری، رفیق و همکار همیشگی ما

راستی تا یادم نرفته! قطعاً این کتاب بی‌ایراد نیست، خوشحال می‌شیم نظرهای قشنگتون رو با ما در میون بذارید.

Hosseinkhanihamed_math
alishabanimath
حامد حسینخانی
علیرضا شعبانی نصر
زمستان ۱۴۰۳

فهرست

تقدیم به

همسر عزیزم، سنگ صبوری که دنیای مرا زیبا کرد.

حسینخانی

پدر و مادر عزیزم که تمام من هستند.

شعبانی

فصل ۵ دنباله

پیش‌نیازهای این فصل: معادله

مهم‌ترین مبحث این فصل: رابطهٔ بازگشتی ـ جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی و هندسی ـ واسطه‌های حسابی و هندسی ـ مجموع جملات

فصل‌های منطبق با کتاب درسی: دوم و سوم دوازدهم

تعداد تست در کنکور: ۳ تست

۱ الگو و دنباله

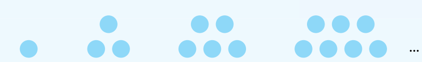
در ابتدا به تعریفی که در دورهٔ اول دبیرستان با آن آشنا شدید، اشاره می‌کنیم.

الگو شکل یا اعدادی که با قانون مشخص پشت سر هم قرار گرفته‌اند را الگو می‌نامیم.

توجه به رابطه (*یا همون قانون مشخص*) در الگوها که جملهٔ nام الگو را مشخص می‌کند، **جملهٔ عمومی** الگو می‌گوییم و آن را با نماد a_n، b_n و ... نمایش می‌دهیم.

مثلاً شکل زیر را با هم ببینیم:

این توپ‌ها بیانگر یک الگو هستند که جملات این الگو به شکل زیر است:



مرحلهٔ ۱ مرحلهٔ ۲ مرحلهٔ ۳ مرحلهٔ ۴

مرحله	۱	۲	۳	۴	...
تعداد توپ	$\underbrace{1}_{2-1}$	$\underbrace{3}_{4-1}$	$\underbrace{5}_{6-1}$	$\underbrace{7}_{8-1}$	...

با توجه به این جدول می‌توانیم حدس بزنیم که جملهٔ عمومی این الگو به صورت $a_n = 2n - 1$؛ است. یعنی تعداد توپ‌ها در هر مرحله یک واحد کم‌تر از دو برابر شمارهٔ آن مرحله است.

حالا تعریف دنباله را با هم ببینیم.

دنباله به اعدادی که پشت سر هم قرار گرفته‌اند، دنباله می‌گوییم.

معمولاً جملات یک دنباله را به صورت a_1، a_2، a_3 و ... نشان می‌دهیم و منظور از a_1 همان جملهٔ اول، a_2 جملهٔ دوم و ... است.

نکته یک دنباله، تابعی است که دامنهٔ آن **اعداد طبیعی** (*همون شمارهٔ جمله*) و برد آن **زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی** است.

توجه در این‌جا هم جملهٔ nام دنباله (جملهٔ عمومی یا ضابطهٔ دنباله) را با a_n نشان داده و برای به دست آوردن جملات دنباله، در جملهٔ عمومی آن به جای n (شمارهٔ جمله)، اعداد طبیعی را قرار می‌دهیم.

مثلاً در دنباله‌ای با جملهٔ عمومی $a_n = 3n^2 - 1$:

برای به دست آوردن جملهٔ سوم باید به جای n، عدد ۳ را قرار دهیم:

$$a_3 = 3(3)^2 - 1 = 3(9) - 1 = 27 - 1 = 26$$

۲۶۹- اگر $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ ، $b_n = 2n$ و $c_n = 1-(-1)^{n+1}$ باشد، حاصل $a_2 - b_3 + c_{4k}$ کدام است؟ $(k \in \mathbb{N})$

۱) $-\frac{15}{4}$ ۲) $-\frac{8}{9}$ ۳) $\frac{8}{9}$ ۴) $\frac{5}{4}$

جملات a_2، b_3 و c_{4k} را با توجه به دنبالهٔ داده‌شده به دست بیار.

حاصل خواسته‌شده را محاسبه کن.

۲ چند دنبالهٔ خاص

دنباله‌ها انواع مختلفی دارند که در این‌جا به بررسی چند نوع خاص از آن‌ها می‌پردازیم:

رابطهٔ بازگشتی رابطه‌ای که در آن هر جملهٔ دنباله (یعنی a_n) برحسب جمله یا جملات قبلی دنباله (یعنی a_{n-1}، a_{n-2} و ...) نوشته شود، رابطهٔ بازگشتی می‌نامیم.

مثال در دنبالهٔ $a_1=1$ ؛ $a_n = 2a_{n-1}+1$، چهار جملهٔ اول به صورت زیر است:

$$\begin{cases} n=2 \Rightarrow a_2 = 2\overset{1}{\cancel{a_1}}+1=3 \\ n=3 \Rightarrow a_3 = 2\overset{3}{\cancel{a_2}}+1=7 \\ n=4 \Rightarrow a_4 = 2\overset{7}{\cancel{a_3}}+1=15 \end{cases}$$

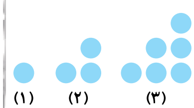
دنبالهٔ دوضابطه‌ای دنباله‌ای که تعدادی از جملات آن از یک ضابطه و بقیهٔ جملات آن از ضابطه‌ای دیگر به دست می‌آیند را دنبالهٔ دوضابطه‌ای می‌نامیم.

مثال در دنبالهٔ $a_n = \begin{cases} 2n^2+3 & \text{فرد } n \\ 3n-1 & \text{زوج } n \end{cases}$:

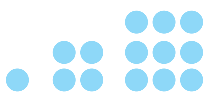
✓ جملهٔ سوم (*چون ۳ فرده*) از ضابطهٔ بالایی به دست می‌آید. $a_3 = 2(3)^2+3 = 2(9)+3 = 21 \Leftarrow$ (۳ فرد است.)

✓ و جملهٔ ششم (به دلیل زوج‌بودن عدد ۶) از ضابطهٔ پایینی به دست می‌آید: $a_6 = 3(6)-1 = 18-1 = 17 \Leftarrow$ (۶ زوج است.)

دنبالهٔ مثلثی دنباله‌ای که جملهٔ اول آن یک است و جملات دیگر آن از مجموع **جملهٔ قبلی و شمارهٔ آن جمله** به دست می‌آیند را دنبالهٔ مثلثی می‌نامیم. ویژگی‌ها و نمایش‌های مختلف دنبالهٔ مثلثی را در جدول زیر با هم می‌بینیم:

جملات	شکل	جدول	رابطهٔ بازگشتی	جملهٔ عمومی
...,۱,۳,۶,۱۰,۱۵		شمارهٔ مرحله: ۱ | ۲ | ۳ | ... | n a_n: ۱ | ۱+۲ | ۱+۲+۳ | ... | ۱+۲+۳+...+n	$a_{n+1}=a_n+(n+1)$ $(a_1=1)$	$a_n=\frac{n(n+1)}{2}$

دنبالهٔ مربعی دنباله‌ای که هر جملهٔ آن برابر **مربع شمارهٔ آن جمله** است را دنبالهٔ مربعی می‌گوییم.
ویژگی‌ها و نمایش‌های مختلف دنبالهٔ مربعی را در جدول زیر با هم می‌بینیم:

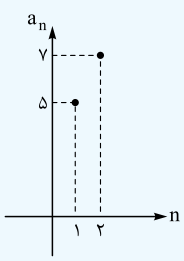
جملات	شکل	جدول	رابطهٔ بازگشتی	جملهٔ عمومی
...,۱,۴,۹,۱۶,۲۵		شمارهٔ مرحله: ۱ | ۲ | ۳ | ... | n a_n: ۱×۱ | ۲×۲ | ۳×۳ | ... | n×n	$a_{n+1}=a_n+(2n+1)$ $(a_1=1)$	$a_n=n^2$

دنبالهٔ فیبوناچی دنباله‌ای بازگشتی است که دو جملهٔ اول آن برابر **یک** است و جملات دیگر آن برابر **مجموع دو جملهٔ قبلی** می‌باشد.

$$\boxed{a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \,,\, a_2=a_1=1} \xrightarrow{\text{جملات}} 1,1,2,3,5,8,13,21,34,\ldots$$

نکته مجموع n جملهٔ ابتدایی دنبالهٔ فیبوناچی به صورت مقابل است: $\boxed{S_n = 2a_n + a_{n-1} - 1}$

نمودار دنباله هر دنباله تابعی است که در ازای هر ورودی یک خروجی به ما می‌دهد، مثلاً همان‌طور که می‌دانیم $a_n=2n+3$ یک جملهٔ عمومی دنباله است که به ازای $n=1$، می‌توانیم جملهٔ اول و به ازای $n=2$ می‌توانیم جملهٔ دوم آن را به دست بیاوریم و ... ؛ بنابراین می‌توانیم آن را بر روی نمودار نشان دهیم.



نقطهٔ مدنظر را به‌صورت $(1,5)$ یا $(1,a_1)$ نمایش می‌دهیم که مؤلفهٔ اول، مقدار n جای‌گذاری شده و مؤلفهٔ دوم خروجی جملهٔ مدنظر می‌باشد. $a_1 = 2(1)+3 = 5$

نکته برای رسم نمودارهای دنباله‌ها، هر جمله که به صورت (n, a_n) است را فقط با یک نقطه روی نمودار نشان می‌دهیم.

۲۷۰- جملهٔ هشتم از دنبالهٔ اعداد با رابطهٔ $a_۱ = a_۲ = ۳$ و $a_{n+۲} = a_{n+۱} + a_n - n$ کدام است؟ (انسانی خارج ۹۹)

۱) ۲۳ ۲) ۱۹ ۳) ۱۷ ۴) ۱۳

جملات دنباله را به ترتیب بنویس تا به جملهٔ هشتم برسی.

به ترتیب مقادیر ۱، ۲، ... را به جای n جای‌گذاری کن.

در دنباله‌های بازگشتی هر جمله را به کمک جملهٔ قبلی به دست بیار.

۲۷۱- در دنبالهٔ a_n با رابطهٔ بازگشتی $a_{n+۳} = a_n + a_{n+۱} + a_{n+۲}$ و $a_۱ = a_۲ = a_۳ = ۲$ نسبت جملهٔ هفتم به جملهٔ پنجم کدام است؟

۱) $۲/۵$ ۲) $۳/۲$ ۳) $۴/۶$ ۴) $۳/۴$

جملهٔ هفتم و پنجم خواسته‌شده را یافته و نسبت آن‌ها را پیدا کن.

رابطهٔ بازگشتی داده‌شده را به کمک جمله‌های قبلی بنویس.

مقادیر n را در رابطهٔ داده شده جای‌گذاری کن.

۲۷۲- جملهٔ چهاردهم دنبالهٔ بازگشتی $a_{n+۱} = \frac{۱}{a_n} + ۱$ با فرض $a_{۱۶} = \frac{۱۵۹۷}{۹۸۷}$ کدام است؟ (انسانی ۱۴۰۰)

۱) $\frac{۲۳۳}{۳۷۷}$ ۲) $\frac{۳۷۷}{۶۱۰}$ ۳) $\frac{۳۷۷}{۲۳۳}$ ۴) $\frac{۶۱۰}{۳۷۷}$

به ترتیب جملهٔ پانزدهم و پس از آن جملهٔ شانزدهم را به دست بیار.

$n = ۱۴,۱۵$ را جای‌گذاری کن.

رابطهٔ بازگشتی را بازنویسی کن و a_n را برحسب $a_{n+۱}$ به دست بیار.

با داشتن جملهٔ شانزدهم به کمک رابطهٔ بازگشتی جملات پانزدهم و چهاردهم را به دست بیار.

۲۷۳- جملهٔ ششم دنبالهٔ بازگشتی $a_۱ = a_۲ = ۱$ و $a_{n-۱} = a_{n-[\frac{n}{۲}]} + ۲a_{n-[\frac{n}{۳}]}$ کدام است؟ ([ ] علامت جزء صحیح است.) (انسانی خارج ۱۴۰۲)

۱) -۳ ۲) ۳ ۳) -۱ ۴) ۱

همین مراحل را تا رسیدن به جملهٔ ششم ادامه بده.

به ترتیب مقادیر $n = ۴$، $n = ۵$، ... را جای‌گذاری کن.

در دنباله‌های بازگشتی هر جمله را به کمک جملهٔ قبلی به دست بیار.

۲۷۴- مقدار $a_۳ = \frac{۱۷}{۱۲}$ از رابطهٔ بازگشتی $a_{n+۱} = \frac{۱}{۲}(a_n + \frac{a_۱}{a_n})$، تقریبی از $\sqrt{k}$ است. اگر $k \in \mathbb{N}$ و $a_۱ = k$ باشد، مقدار k کدام است؟ (انسانی خارج ۱۴۰۲)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

با حل معادلهٔ درجهٔ دوم به دست آمده، مقدار k را به دست بیار.

با جای‌گذاری $a_۳ = \frac{۱۷}{۱۲}$ یک معادله برحسب k به دست بیار.

به ترتیب $n = ۱$ و $n = ۲$ را در رابطهٔ بازگشتی جای‌گذاری کن.

۲۷۵- جملهٔ ۱۴۰۰ام دنبالهٔ اعداد با رابطهٔ $a_۱ = ۱$ و $a_{n+۱} = \begin{cases} ۱ & \text{زوج } n \\ \frac{۱}{۱ + a_n} & \text{فرد } n \end{cases}$ کدام است؟ (انسانی ۱۴۰۱)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) صفر

جملهٔ ۱۴۰۰ام را به دست بیار.

جملهٔ عمومی دنباله را حدس بزن.

چند جملهٔ ابتدایی دنباله را بنویس.

۲۷۶- دو جملهٔ متوالی دنبالهٔ $a_n = \begin{cases} ۱۰۰ - \frac{۱}{۲}n^۲ & \text{زوج } n \\ \frac{۲}{۱۵}n & \text{فرد } n \end{cases}$ برابر هستند. اگر مقدار این دو جملهٔ متوالی، برابر مقدار صحیح k باشد، مقدار $k - a_{۱۶}$ کدام است؟ (انسانی خارج ۱۴۰۱)

۱) ۲۶ ۲) ۲۸ ۳) ۳۰ ۴) ۳۲

حاصل خواسته‌شده را به دست بیار.

به کمک فرض مسئله (برابری دو جملهٔ متوالی) مقدار k را به دست بیار.

مقادیر ۱۴، ۱۵ و ۱۶ را جای‌گذاری کن.

با توجه به صحیح‌بودن جملات از ضابطهٔ پایین می‌فهمیم $n = ۱۵$ است.

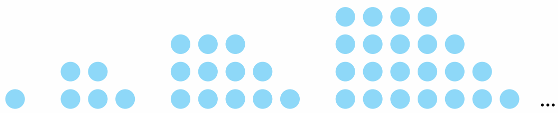
یک جمله از ضابطهٔ بالا و یکی از ضابطهٔ پایین باید انتخاب کن.

۲۷۷- در دنبالهٔ اعداد $\dots,۱۶,۱۱,۷,۴,۲,۱$ جملهٔ دهم کدام است؟ (انسانی ۹۸)

۱) ۳۷　۲) ۴۲　۳) ۴۵　۴) ۴۶

مقدار جملهٔ دهم را به دست می‌آوریم. ← جملهٔ عمومی دنباله را می‌نویسیم. ← اگر از هر جمله یک واحد کم کنیم، دنباله‌ای شبیه به مثلثی داریم. ← دنبالهٔ داده‌شده را با دنباله‌های معروف مقایسه کن.

۲۷۸- در الگوی مقابل، تعداد دایره‌ها در شکل نهم کدام است؟



۱) ۱۱۷　۲) ۱۲۰　۳) ۱۲۳　۴) ۱۲۵

تعداد دایره‌ها در شکل نهم را به دست بیار. ← جملهٔ عمومی نهایی را مشخص کن. ← جملهٔ عمومی مربوط به هر قسمت را تعیین کن. ← شکل‌های موجود در هر مرحله را به دو قسمت مربعی و مثلثی تقسیم کن.

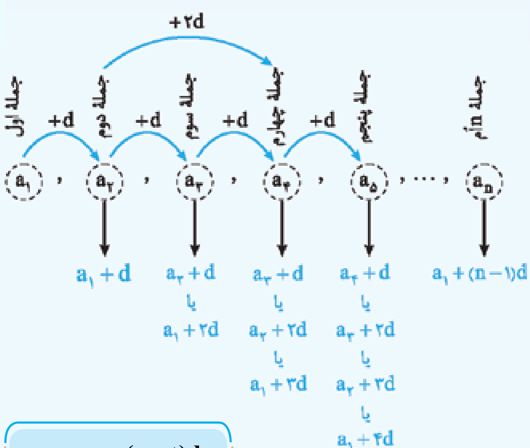
۲۷۹- در دنبالهٔ فیبوناچی $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ و $a_1=a_2=1$، جملهٔ یازدهم کدام است؟ (انسانی خارج ۹۸)

۱) ۸۹　۲) ۹۲　۳) ۹۴　۴) ۹۶

جملات مختلف دنباله را بنویس تا به جملهٔ یازدهم برسی. ← مقادیر ۱، ۲ و ... را به ترتیب به جای n جای‌گذاری کن.

۳ دنبالهٔ حسابی

- دنباله‌ای که هر جملهٔ آن (به‌جز جملهٔ اول) از مجموع جملهٔ قبلی و عددی ثابت به دست می‌آید را دنبالهٔ حسابی می‌گوییم.
- این عدد ثابت را **اختلاف‌مشترک (یا قدرنسبت)** می‌گوییم و با d نمایش می‌دهیم.
- جملات مختلف در یک دنبالهٔ حسابی (با جملهٔ اول a_1 و اختلاف‌مشترک d) در شکل روبه‌رو آمده است:



جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی به صورت مقابل است: $\boxed{a_n=a_1+(n-1)d}$

نکته جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی درجه‌اول است، بنابراین ضابطهٔ جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی را می‌توانیم به‌صورت $a_n=An+B$ بنویسیم که در آن ضریب n برابر قدرنسبت دنباله است.

مثلاً در دنبالهٔ $a_n=۳n-۵$، قدرنسبت دنباله برابر ۳ است.

مثال فرض کنید می‌خواهیم بررسی کنیم در دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول ۶۳ و قدرنسبت (-۴) چند جملهٔ مثبت داریم:

گام اول: ابتدا جملهٔ عمومی دنباله را می‌نویسیم:

$$a_n=\underbrace{a_1}_{۶۳}+(n-1)\underbrace{d}_{-۴}\Rightarrow a_n=۶۳-۴n+۴\Rightarrow a_n=۶۷-۴n$$

گام دوم: جملهٔ عمومی به‌دست‌آمده را بزرگ‌تر از صفر قرار می‌دهیم تا حدود n به دست آید:

$$۶۷-۴n>۰\Rightarrow ۴n<۶۷\Rightarrow n<\underbrace{\frac{۶۷}{۴}}_{۱۶/۷۵}\xrightarrow{n\in\mathbb{N}} n=۱,۲,\dots,۱۶$$

توجه داشته باشید که مقادیر قابل قبول برای n اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۶/۷۵ است.

گام سوم: تعداد جملات را می‌شماریم:

$$\text{تعداد}:\frac{\text{اولی}-\text{آخری}}{\text{گام}}+1\Rightarrow\frac{۱۶-۱}{۱}+۱=۱۶$$

توجه در دنبالهٔ حسابی اگر
- $d>0$ ← دنباله افزایشی است.
- $d<0$ ← دنباله کاهشی است.

مثال دنبالهٔ ... $۷,۱۱,۱۵,۱۹,\dots$ افزایشی ($d=۴$) و دنبالهٔ ... $۱۷,۱۱,۵,-۱,\dots$ کاهشی ($d=-۶$) است.

رابطهٔ بازگشتی مربوط به دنبالهٔ حسابی به صورت مقابل است: $\boxed{a_n = a_{n-۱} + d}$

این رابطهٔ بازگشتی به این معنی است که هر جمله به علاوهٔ قدرنسبت دنبالهٔ حسابی، جملهٔ بعدی را به ما می‌دهد.

مثال رابطهٔ بازگشتی دنبالهٔ $۵,۸,۱۱,۱۴,\dots$ ($d=۳$) به شکل $a_{n+۱} = a_n + ۳$ است.

سؤالات مربوط به دنبالهٔ حسابی را می‌توان در چند تیپ، دسته‌بندی کرد:

تیپ ۱: تشخیص دنباله از روی دو جملهٔ دلخواه اگر a_m و a_n دو جملهٔ دلخواه از دنباله‌ای حسابی باشند:

گام اول: به کمک رابطهٔ $d = \dfrac{a_m - a_n}{m-n}$ اختلاف‌مشترک را به دست می‌آوریم.

گام دوم: مقدار d را در رابطهٔ $a_n = a_۱ + (n-۱)d$ جای‌گذاری کرده و $a_۱$ را به دست می‌آوریم.

گام سوم: خواستهٔ مسئله را محاسبه می‌کنیم.

مثال اگر ۱۲ و ۶ جملات ششم و سوم یک دنبالهٔ حسابی باشند:

✓ $d = \dfrac{a_۶ - a_۳}{۶-۳} = \dfrac{۱۲-۶}{۳} = ۲$

✓ $a_۶ = a_۱ + ۵d \xrightarrow{d=۲} ۱۲ = a_۱ + ۵(۲) \Rightarrow a_۱ = ۲$

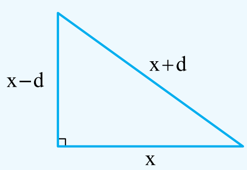
تیپ ۲: شرط تشکیل دنبالهٔ حسابی (واسطهٔ حسابی) فرض کنید a، b و c سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند، آن‌گاه جملهٔ وسط، میانگین دو جملهٔ دیگر است؛ یعنی: $b = \dfrac{a+c}{۲}$ یا $۲b = a + c$ و (b را واسطهٔ حسابی a و c می‌نامیم.)

توجه شرط تشکیل دنبالهٔ حسابی برای هر سه جملهٔ دلخواه از دنباله که فاصلهٔ یکسانی با هم دارند، نیز بیان می‌شود.

مثال در یک دنبالهٔ حسابی، جملهٔ هفتم واسطهٔ حسابی جملات چهارم و دهم است: $a_۷ = \dfrac{a_۴ + a_{۱۰}}{۲} \Rightarrow ۲a_۷ = a_۴ + a_{۱۰}$

نکته در حل مسائلی که سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی خواسته شده است، آن‌ها را به صورت $a-d, a, a+d$ و پنج جملهٔ متوالی را به صورت $a-۲d, a-d, a, a+d, a+۲d$ در نظر می‌گیریم.

مثال فرض کنید اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۲ داده‌اند و می‌خواهیم مقدار x را پیدا کنیم:



برای حل، ضلع متوسط را برابر x در نظر می‌گیریم و بقیهٔ اضلاع را مطابق با ضلع متوسط مشخص می‌کنیم:

✓ ضلع متوسط ← x

✓ ضلع کوچک‌تر ← $x - d = x - ۲$

✓ ضلع بزرگ‌تر (وتر) ← $x + d = x + ۲$

حالا رابطهٔ فیثاغورس را برای این مثلث می‌نویسیم: $(x+۲)^۲ = x^۲ + (x-۲)^۲ \Rightarrow x^۲ + ۴x + ۴ = x^۲ + x^۲ - ۴x + ۴$

$\Rightarrow x^۲ - ۸x = ۰$

$\Rightarrow x(x-۸) = ۰ \Rightarrow$ $x = ۰$ ✗ (طول نمی‌تونه صفر باشه.) ، $x = ۸$ ✓

تیپ ۳: درج m واسطهٔ حسابی اگر بخواهیم بین a و b، m عدد را طوری قرار دهیم که همهٔ این اعداد (یعنی a، b و mتای وسط) تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند، داریم:

$$\underset{\text{جملهٔ اول }(a_۱)}{a}, \overbrace{\cdots}^{m \text{ تا}}, \underset{\text{جملهٔ آخر }(a_{m+۲})}{b} \Rightarrow d = \frac{a_{m+۲} - a_۱}{(m+۲)-۱} = \frac{b-a}{m+۱}$$

مثال اگر بین ۱۲− و ۵۲ سه واسطهٔ حسابی درج کنیم، قدر نسبت برابر است با: $\underset{a_۱}{-۱۲}, \dots, \underset{a_۵}{۵۲} \Rightarrow d = \dfrac{۵۲-(-۱۲)}{۴} = \dfrac{۶۴}{۴} = ۱۶$

تیپ ۴: جملات مشترک دو دنبالهٔ حسابی برای پیداکردن جملات مشترک به شکل زیر عمل می‌کنیم:

گام اول: جملات هر دو دنباله را می‌نویسیم تا اولین جملهٔ مشترک آن‌ها را پیدا کنیم.

گام دوم: ک.م.م قدرنسبت‌های دو دنبالهٔ اولیه، قدرنسبت دنبالهٔ جدید می‌شود.

گام سوم: جملهٔ عمومی جملات مشترک را به دست می‌آوریم.

مثال می‌خواهیم جملات مشترک دو دنبالهٔ $۲,۶,۱۰,\dots$ و $۵,۸,۱۱,\dots$ را تعیین کنیم:

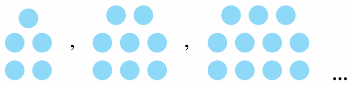
① $۲,۶,۱۰,\underline{۱۴},\dots : d = ۴$

$۵,۸,۱۱,\underline{۱۴},\dots : d = ۳$

② $d = [۴,۳] = ۱۲$

③ $a_n = ۱۴ + (n-۱)۱۲ = ۱۲n + ۲ \Rightarrow$ جملات مشترک: $۱۴,۲۶,۳۸,\dots$

۲۸۰- در الگوی مقابل، اختلاف تعداد نقطه‌ها در شکل پانزدهم و سیزدهم کدام است؟



۱) ۸　　۲) ۶
۳) ۱۸　　۴) ۱۲

اختلاف جملات پانزدهم و سیزدهم را به دست می‌آوریم.	جملهٔ عمومی دنباله، یک دنباله حسابی است، آن را به دست می‌آوریم.	تعداد شکل‌ها در چند مرحلهٔ ابتدایی را بنویس سپس جملهٔ عمومی دنباله را حدس بزن.

۲۸۱- اگر جملهٔ اول و پنجم یک دنبالهٔ حسابی به ترتیب ۳ و ۱۱ باشد، جملهٔ دهم این دنباله کدام است؟ (انسانی ۱۴۰۱)

۱) ۲۱　　۲) ۲۲　　۳) ۲۳　　۴) ۲۴

جملهٔ دهم را به دست می‌آوریم.	جملهٔ عمومی دنباله را می‌نویسیم.	به کمک جملهٔ عمومی، اختلاف‌مشترک دنباله را به دست می‌آوریم.

۲۸۲- در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع جملات سوم، پنجم و سیزدهم برابر ۷۵ است. جملهٔ هفتم کدام است؟ (انسانی خارج ۹۹)

۱) ۲۲　　۲) ۲۴　　۳) ۲۵　　۴) ۲۹

جملهٔ هفتم را به دست بیار.	مجموع آن‌ها را برابر ۷۵ قرار بده و ساده کن.	جملهٔ عمومی جملات a_3، a_5 و a_{13} را در یک دنبالهٔ حسابی دلخواه به دست بیار.

۲۸۳- در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع جملات سوم و بیست و هشتم از جملهٔ پنجم، ۶۱ واحد بیشتر است. جملهٔ بیست و ششم این دنباله کدام است؟

۱) ۷۶　　۲) ۶۱　　۳) ۵۵　　۴) ۴۳　　(انسانی نوبت اول ۱۴۰۳)

ساده‌سازی کن و حاصل خواسته‌شده را به دست بیار.	به کمک جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی حاصل هر جمله را بنویس.	فرض مسئله را به زبان ریاضی بنویس.

۲۸۴- در دنبالهٔ حسابی ...,۲۰۸,۲۰۴,۲۰۰ کدام جمله برابر صفر است؟

۱) ۵۲　　۲) ۵۳　　۳) ۵۴　　۴) ۵۱

شمارهٔ جمله را به دست بیار.	جملهٔ عمومی را مشخص کرده و برابر صفر قرار بده.	دنباله حسابی نزولی است، پس جملهٔ اول و قدرنسبت را مشخص کن.

۲۸۵- در یک دنبالهٔ حسابی، جملهٔ اول برابر ۱۰ و مجموع جملات هشتم و نهم برابر ۱۱۰ است. جملهٔ ششم کدام است؟

۱) ۱۵　　۲) ۲۵　　۳) ۴۰　　۴) ۳۰

سپس جملهٔ ششم را به راحتی به دست بیار.	با داشتن جملهٔ اول و مجموع جملات هشتم و نهم قدرنسبت را به دست بیار.

۲۸۶- واسطهٔ حسابی بین جملات چهارم و هفتم دنبالهٔ ...,۸,۱۴,۲۰ کدام است؟

۱) ۳۵　　۲) ۳۰　　۳) ۲۵　　۴) ۴۰

واسطهٔ حسابی بین جملات داده‌شده را بنویس.	سپس جملات چهارم و هفتم را به دست بیار.	با استفاده از جملات داده‌شده قدرنسبت را به دست بیار.

۲۸۷- بین اعداد ۱۶ و ۶۴، چند واسطهٔ حسابی بنویسیم تا جملهٔ هشتم این دنباله برابر ۴۴ شود؟ $(a_1 = 16)$

۱) ۸　　۲) ۹　　۳) ۱۳　　۴) ۱۱

تعداد واسطه‌ها به دست آمده.	با استفاده از قدرنسبت به دست آمده و فرمول واسطه‌ها، مقدار مجهول مشخص می‌شود.	قدرنسبت را با استفاده از این دو جمله به دست بیار.	جملات $a_1 = 16$ و $a_8 = 44$ مشخص است.

۲۸۸- در یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a و قدرنسبت d، تساوی $6a_2^2 = 5a_3a + 3a_2a$ برقرار است. نسبت جملهٔ چهارم دنباله به d، کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۳/۵ ۴) ۴

حاصل خواسته‌شده به راحتی مشخص می‌شود. | با اعمال تغییر متغیر $x = \frac{a}{d}$ معادله را بازنویسی کن، x را به دست بیار. | در رابطهٔ داده‌شده جای‌گذاری کرده و معادله‌ای برحسب a و d به دست بیار. | جملات a_2 و a_3 را در دنبالهٔ حسابی دلخواه به دست بیار.

۴ مجموع جملات دنبالهٔ حسابی

مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a_1 و اختلاف‌مشترک d را با S_n نشان می‌دهیم و برای محاسبهٔ آن می‌توانیم از یکی از دو فرمول زیر استفاده کنیم:

الف) اگر تعداد جملات (n)، جملهٔ اول (a_1) و اختلاف‌مشترک (d) معلوم بود:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \quad \text{(فرمول اول)}$$

ب) اگر تعداد جملات (n)، جملهٔ اول (a_1) و جملهٔ آخر (a_n) معلوم بود:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad \text{(فرمول دوم)}$$

مثلاً در دنبالهٔ حسابی $a_n = 3n - 7$، مجموع ۲۰ جملهٔ اول برابر است با:

$$a_n = 3n - 7 \begin{cases} d = 3 \\ a_1 = 3 - 7 = -4 \end{cases} \Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2}[2(-4) + (20-1)3] = 10 \times 49 = 490$$

۲۸۹- در یک دنبالهٔ حسابی، اختلاف‌مشترک ۰/۵- و مجموع دوازده جملهٔ اول برابر ۹ است. جملهٔ اول این دنباله کدام است؟ (انسانی خارج ۱۴۰۱)

۱) $-\frac{7}{2}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{7}{2}$

رابطهٔ S_{12} را به کمک فرمول مجموع جملات بنویس. | با جای‌گذاری d، مقدار a_1 را به دست می‌آوریم.

۲۹۰- مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ عددی به صورت $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$ است. در این دنباله مجموع جملات با شروع از جملهٔ هفتم و ختم به جملهٔ هجدهم کدام است؟

۱) ۹ ۲) $\frac{29}{3}$ ۳) $\frac{49}{3}$ ۴) ۱۸

S_6 و S_{18} را با توجه به رابطهٔ داده‌شده به دست بیار. | تفاضل این دو، برابر حاصل خواسته‌شده است.

۲۹۱- در یک دنبالهٔ حسابی، جملهٔ هفتم، نصف جملهٔ سوم است، مجموع چند جملهٔ اول از این دنباله، صفر است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۹ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

فرض مسئله را بنویس و ساده کن تا رابطه‌ای بین a_1 و d به دست بیاد. | رابطهٔ به‌دست‌آمده را در فرمول S_n جای‌گذاری کن. | $S_n = 0$ را حل کرده و n را به دست بیار.

۲۹۲- در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع ۱۲ جملهٔ اول آن ۱۳۸ و جملهٔ ششم آن ۱۰ است، جملهٔ اول این دنباله کدام است؟

۱) ۵- ۲) ۴- ۳) ۳- ۴) ۲-

رابطهٔ مربوط به a_6 و S_{12} را بنویس. | یک دستگاه دو معادله دو مجهول بساز. | با حل دستگاه a و d را به دست بیار.

۲۹۳- در یک دنبالهٔ حسابی، جملهٔ nام به صورت $a_n = \frac{3}{2}n - 5$ است. مجموع ۱۵ جملهٔ اول این دنباله، کدام است؟

۱) ۹۰ ۲) ۱۰۵ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۳۵

a_1 و a_{15} را به کمک رابطهٔ داده‌شده به دست بیار. | به کمک فرمول $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$، S_{15} را حساب کن.

۲۹۴- مجموع ۳۵ عدد طبیعی بخش‌پذیر بر ۳ که بزرگ‌ترین آن‌ها ۱۵۰ باشد، کدام است؟ (انسانی خارج ۹۸)

۱) ۳۴۲۰ ۲) ۳۴۶۵ ۳) ۳۴۷۵ ۴) ۳۵۰۰

چند عدد اولیهٔ دنباله را بنویس. ← a_1 و d را تعیین کن. ← مجموع ۳۵ جمله یعنی S_{35} را محاسبه کن.

۲۹۵- اعداد $1, x, y, \frac{5}{2}, \ldots$ ، چهار جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی‌اند، مجموع پانزده جملهٔ اول این دنباله کدام است؟

۱) ۵۷ ۲) ۶۲/۵ ۳) ۶۷/۵ ۴) ۶۸

شمارهٔ جملات معلوم را مشخص کن. ← به کمک جملهٔ عمومی و داشتن جملات، مقدار d را به دست بیار. ← S_{15} را به کمک فرمول محاسبه کن.

۲۹۶- در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع پنج جملهٔ اول آن، $\frac{1}{3}$ مجموع پنج جملهٔ بعدی است. جملهٔ دوم چند برابر جملهٔ اول می‌باشد؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) ۳ ۴) ۴

S_5 و S_{10} را به دست بیار. ← فرض مسئله را به کمک آن‌ها بازنویسی کن. ← با ساده‌کردن آن رابطه‌ای بین a و d به دست میاد. ← نسبت خواسته‌شده را به دست بیار.

۲۹۷- در یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a اگر یک واحد به قدرنسبت (اختلاف‌مشترک) جملات افزوده شود، آن‌گاه به مجموع ۲۰ جملهٔ اول چه‌قدر افزوده خواهد شد؟

۱) ۱۶۰ ۲) ۱۷۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۱۹۰

S_{20} را در حالت اولیه بنویس. ← تغییرات گفته‌شده را اعمال کن. ← S_{20} را در حالت جدید بنویس. ← تفاضل آن‌ها را به دست بیار.

۲۹۸- در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع ۹ جملهٔ اول برابر ۹۰ و جملهٔ هفتم آن ۱۳ است. تفاضل جملات متوالی کدام است؟ (انسانی ۹۹)

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

رابطهٔ S_9 را بنویس و رابطه‌ای بین a و d را به دست بیار. ← رابطهٔ a_7 را نوشته و رابطه‌ای بین a و d را به دست بیار. ← با حل دستگاه، a و d مشخص می‌شود.

۲۹۹- مجموع ۱۰ جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی ۲۶- و نسبت جملهٔ پانزدهم به جملهٔ ششم دنباله ۶ است. جملهٔ یازدهم دنباله کدام است؟ (انسانی ۱۴۰۰)

۱) ۱۳/۶- ۲) ۱۴/۸- ۳) ۱۵/۶- ۴) ۱۶/۸-

رابطهٔ S_{10} را بنویس و رابطه‌ای بین a و d را بنویس. ← رابطهٔ $\frac{a_{15}}{a_6}$ را نوشته و رابطه‌ای بین a و d بنویس. ← با حل دستگاه، a و d را بنویس. ← جملهٔ یازدهم را به دست بیار.

۳۰۰- در بیست جملهٔ اول از یک دنبالهٔ حسابی، مجموع جملات ردیف فرد، ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج، ۱۵۰ است، جملهٔ اول کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

جملات ردیف فرد و ردیف زوج را به عنوان دو دنبالهٔ جدید در نظر بگیر. ← جملهٔ اول و قدرنسبت هر کدام را تعیین کن. ← مجموع جملات را برای هر دنبالهٔ جدید بنویس. ← با حل دستگاه، جملهٔ اول را به دست بیار.

۳۰۱- مجموع پنج جملهٔ اول از یک دنباله حسابی افزایشی، برابر ۶۰ و مجموع دو جملهٔ بزرگ‌تر، سه برابر مجموع دو جملهٔ کوچک‌تر است. اختلاف‌مشترک دنباله کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

مجموع پنج جملهٔ دنبالهٔ حسابی برابر جملهٔ وسط در تعداد جملات است. ← جملهٔ وسط را به دست بیار و رابطهٔ بین آن‌ها را بنویس. ← سپس رابطهٔ بین مجموع‌ها را نوشته و رابطه‌ای بین a و d بنویس. ← با کمک حل دستگاه، a و d را محاسبه کن.

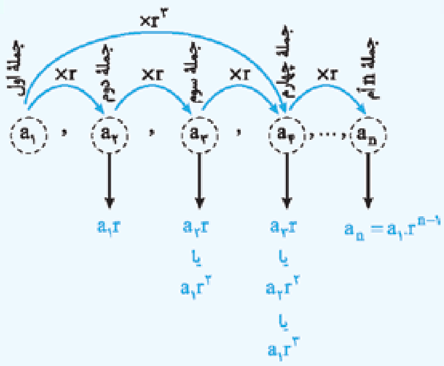
۳۰۲- در یک سالن در ردیف اول ۸، در ردیف دوم ۱۲ و ردیف سوم ۱۶ صندلی قرار دارد. صندلی‌ها با همین نظم در ۱۲ ردیف چیده شده‌اند. اگر بخواهند این سالن را به دو سالن با نصف ظرفیت کنونی تفکیک کنند به طوری که در سالن‌های جدید چیدمان صندلی‌ها دارای همان نظم قبلی ولی با ۴ صندلی در ردیف نخست شروع شود، در سالن‌های جدید چند ردیف صندلی قرار دارد؟ (انسانی نوبت دوم ۱۴۰۳)

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

تعداد صندلی‌های هر ردیف را در حالت اول پشت سر هم بنویس. ← دنبالهٔ این جملات و ویژگی‌های آن را مشخص کن. (جملهٔ اول و قدرنسبت) ← مجموع جملات (مجموع تعداد صندلی‌ها) را مشخص کن. ← تعداد صندلی‌ها را نصف کن. ← تعداد صندلی‌های هر ردیف را در حالت دوم پشت سر هم بنویس. ← دنبالهٔ این جملات و ویژگی‌های آن را مشخص کن. (جملهٔ اول و قدرنسبت) ← بررسی کن با نصف تعداد کل صندلی‌ها چند ردیف می‌توان ساخت! (از فرمول S_n کمک بگیر.)

۵ دنبالهٔ هندسی

- دنباله‌ای که هر جملهٔ آن (به جز جملهٔ اول) از حاصل‌ضرب جملهٔ قبلی در عددی ثابت به دست می‌آید.
- این عدد ثابت را **نسبت‌مشترک (یا قدرنسبت)** می‌گوییم و با r نمایش می‌دهیم.
- جملات مختلف در یک دنبالهٔ هندسی (با جملهٔ اول a_1 و نسبت مشترک r) در شکل مقابل آمده است:



در هر دنبالهٔ هندسی، قدرنسبت از تقسیم دو جملهٔ متوالی به دست می‌آید: $\boxed{r = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}}$

- جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی به صورت مقابل است: $\boxed{a_n = a_1 r^{n-1}}$

مثال در دنبالهٔ هندسی $۴,۶,۹,\ldots$:

۱ جملهٔ اول برابر $a_1 = ۴$ است.

۲ قدرنسبت دنباله برابر است با: $r = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{۶}{۴} = \dfrac{۳}{۲}$

پس جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی برابر است با: $a_n = a_1 \times r^{n-1} = ۴ \times (\dfrac{۳}{۲})^{n-1}$

رابطهٔ بازگشتی مربوط به دنبالهٔ هندسی به صورت مقابل است: $\boxed{a_n = r \times a_{n-1}}$

مثال رابطهٔ بازگشتی دنبالهٔ $\underbrace{۳,۶}_{\times ۲},۱۲,\ldots$ برابر $a_n = ۲ \times a_{n-1}$ است.

- در جدول زیر حالت‌های مختلف دنبالهٔ هندسی از لحاظ صعودی (افزایش) یا نزولی (کاهش) بودن را با هم می‌بینیم:

وضعیت دنبالهٔ هندسی	قدرنسبت (r)	جملهٔ اول (a_1)
صعودی	$r > ۱$	$a_1 > ۰$
نزولی	$۰ < r < ۱$	$a_1 > ۰$
نزولی	$r > ۱$	$a_1 < ۰$
صعودی	$۰ < r < ۱$	$a_1 < ۰$
نه صعودی و نه نزولی	$r < ۰$	$a_1 \neq ۰$

مثال دنبالهٔ هندسی که $a_1 = -۲$ و $r = \dfrac{۱}{۳}$ باشد، صعودی است: $-۲, \dfrac{-۲}{۳}, \dfrac{-۲}{۹}, \dfrac{-۲}{۲۷}, \ldots$

سؤالات مربوط به دنبالهٔ هندسی را می‌توان در چند تیپ، دسته‌بندی کرد:

تیپ ۱: تشخیص دنباله از روی دو جملهٔ دلخواه اگر a_m و a_n دو جملهٔ دلخواه از دنباله‌ای هندسی باشند:

گام اول: به کمک رابطهٔ $\dfrac{a_m}{a_n} = r^{m-n}$ نسبت‌مشترک را به دست می‌آوریم.

گام دوم: مقدار r را در رابطهٔ $a_n = a_1 \times r^{n-1}$ جای‌گذاری کرده و a_1 را به دست می‌آوریم.

گام سوم: خواستهٔ مسئله را محاسبه می‌کنیم.

مثلاً اگر جملات چهارم و هفتم دنباله‌ای هندسی به ترتیب برابر ۱۰ و ۸۰ باشند، آن‌گاه:

۱ نسبت‌مشترک: $r^{7-4}=\frac{a_7}{a_4} \Rightarrow r^3=\frac{80}{10}=8 \Rightarrow r=2$

۲ جملهٔ اول: $a_4=10 \Rightarrow a_1r^3=10 \Rightarrow a_1(2)^3=10 \Rightarrow 8a_1=10 \Rightarrow a_1=\frac{10}{8}$

۳ جملهٔ عمومی: $a_n=a_1r^{n-1}=\frac{10}{8}(2)^{n-1}$

تیپ ۲: شرط تشکیل دنبالهٔ هندسی (واسطهٔ هندسی) فرض کنید a، b و c سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، آن‌گاه جملهٔ وسط به توان ۲، برابر حاصل‌ضرب دو جملهٔ دیگر است؛ یعنی: $b^2=a\times c$ (b را واسطهٔ هندسی a و c می‌نامیم.)

توجه شرط تشکیل دنبالهٔ هندسی برای هر سه جملهٔ دلخواه از دنباله که فاصلهٔ یکسانی با هم دارند نیز بیان می‌شود.

مثلاً در یک دنبالهٔ هندسی، جملهٔ پنجم، واسطهٔ هندسی جملات دوم و هشتم است: $a_5^2=a_2\times a_8$

نکته در حل مسائلی که سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی خواسته شده، آن‌ها را به صورت $\frac{a}{r}$، a و ar در نظر می‌گیریم.

مثلاً فرض کنیم حاصل‌ضرب سه جملهٔ متوالی دنباله‌ای هندسی برابر ۶۴ و مجموع آن‌ها برابر ۲۰ باشد.

سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ هندسی: $\frac{a}{r},a,ar \xrightarrow{\text{حاصل‌ضرب}=64} \frac{a}{\cancel{r}}\times a\times a\cancel{r}=64 \Rightarrow a^3=64 \Rightarrow a=4$

پس جملات این دنباله به شکل $\frac{4}{r},4,4r$ بوده که با توجه به این‌که مجموع آن‌ها ۲۰ است، داریم:

$$\frac{4}{r}+4+4r=20 \Rightarrow \frac{\overbrace{4+4r+4r^2}^{\cancel{4}(r^2+r+1)}}{r}=\cancel{20}^{\,5} \Rightarrow r^2+r+1=5r \Rightarrow r^2-4r+1=0 \Rightarrow r \begin{cases} \frac{4+\overbrace{\sqrt{12}}^{2\sqrt{3}}}{2}=2+\sqrt{3} \\ \frac{4-\overbrace{\sqrt{12}}^{2\sqrt{3}}}{2}=2-\sqrt{3} \end{cases}$$

تیپ ۳: درج واسطهٔ هندسی اگر بخواهیم بین a و b، m عدد را طوری قرار دهیم که همهٔ این اعداد (یعنی a، b و mتای وسط) تشکیل دنبالهٔ هندسی دهند، داریم:

$$\underset{\text{جملهٔ اول }(a_1)}{a},\underbrace{\cdots}_{\text{تا } m},\underset{\text{جملهٔ آخر }(a_{m+2})}{b} \Rightarrow \boxed{\frac{b}{a}=r^{m+1}}$$

مثلاً اگر بخواهیم بین $\frac{1}{2}$ و ۱۶ چهار جمله قرار دهیم که تشکیل دنباله‌ای هندسی دهند، داریم:

$$\underset{a_1}{\frac{1}{2}},\_\_,\_\_,\_\_,\_\_,\underset{a_6}{16} \Rightarrow \frac{a_6}{a_1}=r^5 \Rightarrow \frac{16}{\frac{1}{2}}=r^5 \Rightarrow r^5=32 \Rightarrow r=2$$

۳۰۳- جملهٔ نهم یک دنبالهٔ هندسی، ۵ برابر جملهٔ ششم است. نسبت جملهٔ دهم بر جملهٔ چهارم آن کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۵ ۳) ۲۵ ۴) ۱۲۵

نسبت دو جمله را پیدا کن و قدرنسبت را به دست بیار. ← بعد از پیداکردن قدرنسبت به سراغ خواستهٔ سؤال بروید. ← با جای‌گذاری قدرنسبت به‌دست‌آمده به جواب می‌رسید.

۳۰۴- در یک دنبالهٔ هندسی، جملهٔ هشتم، ۸۱ برابر جملهٔ چهارم است. اگر جملهٔ سوم برابر ۱۸- باشد، جملهٔ پنجم چه‌قدر از جملهٔ هفتم بیشتر است؟ (انسانی ۱۴۰۱)

۱) ۸۹۱ ۲) ۹۷۲ ۳) ۱۰۵۶ ۴) ۱۲۹۶

نسبت جملهٔ هشتم به جملهٔ چهارم را بنویس. ← قدرنسبت را از این رابطه به دست بیار. ← به کمک مقدار a_3، جملات پنجم و هفتم را به دست بیار. ← اختلاف هر دو جملهٔ خواسته‌شده را محاسبه کن.

۳۰۵- جملهٔ اول و نسبت مشترک یک دنبالهٔ هندسی به ترتیب برابر ۱۴۵۸ و $\frac{1}{3}$ است. اگر جملهٔ nام این دنباله برابر ۲ باشد، n کدام است؟ (انسانی نوبت اول ۱۴۰۳)

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۷

جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی داده‌شده را تشکیل بده. ← جملهٔ a_n را برابر ۲ قرار بده. ← مقدار n را به دست بیار.

۳۰۶- اگر $y, x-1, x, x+2, z$ ، جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، مقدار xyz کدام است؟ (انسانی خارج ۱۴۰۰)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

حاصل خواسته‌شده را محاسبه کن.	y و z را پیدا کن.	با نوشتن جملات دنباله، قدرنسبت دنباله را بنویس.	مقدار x را به دست بیار.	رابطهٔ مربوط به واسطهٔ هندسی را برای $x-2$ ، x و $x-1$ بنویس.

۳۰۷- اگر $x-\frac{3}{2}, y, x, z, 4x$ ، جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، مقدار $|x|+|y|+|z|$ کدام است؟ (انسانی ۱۴۰۰)

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

y و z را به دست بیار.	با نوشتن جملات دنباله، قدرنسبت دنباله را پیدا کن.	مقدار x را به دست بیار.	رابطهٔ مربوط به واسطهٔ هندسی را برای $x-\frac{3}{2}$ ، x و $4x$ بنویس.

۳۰۸- در دنبالهٔ هندسی $\frac{4}{3}, a, b, c, \frac{1}{3}, d, e, ...$ ، مقدار e کدام است؟ $(d>0)$ (انسانی خارج ۱۴۰۱)

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ ۴) $\frac{2}{3\sqrt{2}}$

به کمک a_1 و r، مقدار e را به دست بیار.	مشخص می‌کنیم e چندمین جملهٔ دنباله است.	به کمک جملهٔ اول و جملهٔ پنجم قدرنسبت دنباله را به دست بیار.

۶ مسائل توصیفی

مسائل توصیفی مربوط به دنباله‌های هندسی در سه تیپ مختلف مطرح می‌شوند:

تیپ ۱: نیمه‌عمر به مدت‌زمانی که بعد از آن، مقدار یک ماده (یا عنصر) نصف می‌شود، نیمه‌عمر می‌گویند و آن را با $t_{\frac{1}{2}}$ نمایش می‌دهند.

مسائل نیمه‌عمر را به دو روش می‌توان حل کرد:

روش اول فلش‌گذاری:

$$\text{تعداد نیمه‌عمر} = \frac{\text{زمان داده‌شده}}{\text{طول یک نیمه‌عمر}}$$

۱ با توجه به زمان داده‌شده در مسئله تعداد نیمه‌های عمر را به دست می‌آوریم.

۲ هر فلش بیانگر یک نیمه‌عمر است. به تعداد نیمه‌های عمر، فلش‌گذاری کرده و در هر مرحله مقدار ماده را نصف می‌کنیم.

روش دوم فرمول: اگر n، برابر تعداد نیمه‌های عمر سپری‌شده باشد، آن‌گاه مقدار باقی‌ماندهٔ ماده در nامین نیمه‌عمر از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\text{مقدار باقی‌مانده} = \text{مقدار اولیهٔ ماده} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

مثلاً اگر مقدار اولیهٔ یک دارو ۴۰ میلی‌گرم باشد و با گذشت هر ۲ ساعت، مقدار آن در بدن نصف شود، برای محاسبهٔ مقدار باقی‌ماندهٔ دارو در بدن بعد از گذشت ۶ ساعت می‌نویسیم:

۱ تعداد نیمه‌عمر: $n=\frac{6}{2}=3$

۲ مقدار نهایی دارو: $40\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=40\times\frac{1}{8}=5$

یا به روش فلش‌گذاری داریم:

$$40 \xrightarrow[\text{بعد ۲ ساعت}]{\frac{1}{2}} 20 \xrightarrow[\text{بعد ۲ ساعت}]{\frac{1}{2}} 10 \xrightarrow[\text{بعد ۲ ساعت}]{\frac{1}{2}} 5$$

تیپ ۲: درصد افزایش و کاهش اگر در مسئله k درصد افزایش داشته باشیم، اختلاف‌مشترک دنباله از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$r=\frac{100+k}{100}$$

اگر در مسئله k درصد کاهش داشته باشیم، اختلاف‌مشترک دنباله از رابطهٔ روبه‌رو به دست می‌آید:

$$r=\frac{100-k}{100}$$

مثلاً اگر به علت تورم سالانه ۱۰ درصد بر قیمت کالایی اضافه شود:

۱ قدرنسبت:

$$r=\frac{100+10}{100}=1/1$$

۲ قیمت کالا در سال پنجم: اگر قیمت کالا در سال اول را a_1 در نظر بگیریم، آن‌گاه:

$$a_5=a_1\times(1/1)^4 \Rightarrow \frac{a_5}{a_1}=(1/1)^4=(\underbrace{(1/1)^2}_{1/21})^2=1/4641$$

یعنی در سال پنجم قیمت کالا ۱/۴۶۴۱ برابر شده است.

۳۰۹- وزن یک شهاب‌سنگ ۱۵ هزار کیلوگرم است. پس از ورود به جوّ زمین در هر دقیقه ۲۰٪ از وزن آن به خاطر تماس با جوّ زمین از بین می‌رود. پس از گذشت ۳ دقیقه از ورود به جوّ زمین چه‌قدر از وزن شهاب‌سنگ باقی می‌ماند؟

۱) ۷۶۸۰　　۲) ۷۳۲۰　　۳) ۷۲۶۸　　۴) ۷۷۳۲

جملهٔ چهارم دنباله را محاسبه می‌کنیم!! ← جملهٔ عمومی مربوط به دنباله را می‌نویسیم. ← نسبت‌مشترک دنباله را به دست می‌آوریم.

۳۱۰- مدیر یک کارگاه به یک کارگر مبتدی پیشنهاد کرده است که دستمزد روز اولش ۱۰۰۰ تومان باشد و تا پایان هفته هر روز ۲۰ درصد به دستمزد روز قبل وی اضافه شود. دستمزد این کارگر در روز پنجم چه‌قدر است؟

۱) ۱۹۸۶/۳　　۲) ۲۰۱۶/۴　　۳) ۲۰۷۳/۶　　۴) ۲۱۰۴/۸

جملهٔ پنجم دنباله را محاسبه کن!! ← جملهٔ عمومی مربوط به دنباله را بنویس. ← نسبت‌مشترک دنباله را به دست بیار.

۷ مجموع جملات دنبالهٔ هندسی

مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول a_1 و نسبت‌مشترک r را با S_n نشان می‌دهیم و از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$S_n=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r},(r\neq 1)$$

مثلاً مجموع شش جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی ...,۳۲,۱۶,۸ برابر است با:

$$\begin{cases}a_1=32\\ r=\frac{16}{32}=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow S_6=\frac{32(1-(\frac{1}{2})^6}{1-\frac{1}{2}}=\frac{32(1-\frac{1}{64})}{\frac{1}{2}}=\frac{32\times(\frac{64-1}{64})}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{63}{2}}{\frac{1}{2}}=63$$

۳۱۱- در یک دنبالهٔ هندسی، با قدرنسبت $\sqrt{2}$، مجموع هشت جملهٔ اول، چند برابر مجموع چهار جملهٔ اول است؟

۱) ۱۷　　۲) ۵　　۳) ۳　　۴) ۱۵

نسبت آن‌ها را محاسبه کن. ← مجموع هشت جملهٔ اول و چهار جملهٔ اول را به دست بیار.

۳۱۲- در یک دنبالهٔ هندسی صعودی به صورت ...,۴,a,۹,b، مجموع شش جملهٔ اول کدام است؟

۱) $81\frac{3}{8}$　　۲) $81\frac{7}{8}$　　۳) $82\frac{3}{8}$　　۴) $83\frac{1}{8}$

حاصل S_6 را محاسبه کن. ← به کمک جملات داده‌شده قدرنسبت را به دست بیار.

۳۱۳- بین دو عدد ۲ و $16\sqrt{2}$، شش عدد چنان درج شده‌اند که هشت عدد حاصل، دنبالهٔ هندسی تشکیل می‌دهند، مجموع این هشت عدد کدام است؟

۱) $30(2+\sqrt{2})$　　۲) $48\sqrt{2}$　　۳) $30(\sqrt{2}+1)$　　۴) $36(\sqrt{2}+1)$

مخرج حاصل به‌دست‌آمده را گویا کن. ← با داشتن a و r، مقدار S_8 را به دست بیار. ← قدرنسبت دنباله را به دست بیار. ← شمارهٔ جملهٔ مربوط به $16\sqrt{2}$ را بنویس.

۳۱۴- در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع سه جملهٔ اول ۱۳۶ و مجموع شش جملهٔ اول آن ۱۵۳ است. جملهٔ اول، چند برابر جملهٔ پنجم است؟

۱) $\frac{81}{16}$　　۲) ۸　　۳) ۹　　۴) ۱۶

حاصل خواسته‌شده را محاسبه کن. ← نسبت این دو را نوشته و مقدار r را به دست بیار. ← رابطهٔ S_3 و S_6 را بنویس.

۳۱۵- در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع هشت جملهٔ اول $\frac{۵}{۴}$ مجموع چهار جملهٔ اول آن است. جملهٔ هفتم چند برابر جملهٔ اول است؟

۱) $\frac{۱}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۵}{۳۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

حاصل خواسته‌شده را به دست بیار. | نسبت آن‌ها را بنویس و $q^۲$ را به دست بیار. | $S_۸$ و $S_۴$ را بنویس.

۳۱۶- جمله‌های دوم و پنجم یک دنبالهٔ هندسی به ترتیب، $\frac{۱}{۲}$ و ۴ هستند. مجموع هشت جملهٔ اول دنباله کدام است؟ (انسانی خارج ۹۹)

۱) ۶۳/۵ ۲) ۶۳/۷۵ ۳) ۶۴/۵ ۴) ۶۷/۷۵

$S_۸$ را محاسبه کن. | با جای‌گذاری قدرنسبت در یکی از جملات، $a_۱$ را به دست بیار. | به کمک جملات داده‌شده قدرنسبت را به دست بیار

۳۱۷- بین دو عدد ۴ و ۹۷۲، چهار عدد صحیح طوری قرار می‌دهیم که جملات دنبالهٔ هندسی از ۴ شروع و به ۹۷۲ ختم شوند. مجموع این ۶ عدد کدام است؟ (انسانی ۹۸)

۱) ۱۴۵۶ ۲) ۱۴۶۸ ۳) ۱۵۴۶ ۴) ۱۶۵۴

با داشتن $a_۱$ و r، مقدار $S_۶$ را به دست بیار. | قدرنسبت دنباله را به دست بیار. | شمارهٔ جملهٔ مربوط به ۹۷۲ را بنویس.

۳۱۸- در یک دنبالهٔ هندسی، جملهٔ اول ۲۲۴ با قدرنسبت (نسبت‌مشترک) $\frac{۱}{۲}$ و جملهٔ nام آن ۷ می‌باشد. مجموع جملات این دنباله از ۲۲۴ تا عدد ۷ و خود این اعداد، کدام است؟ (انسانی خارج ۹۸)

۱) ۳۶۹ ۲) ۴۲۰ ۳) ۴۴۱ ۴) ۴۵۸

حاصل S_n را به دست بیار. | از رابطهٔ $a_n = ۷$، مقدار n را به دست بیار.

مجموع جملات مختلف دنبالهٔ هندسی

نکته اگر مجموع $۲n$ و n جملهٔ اول از یک دنبالهٔ هندسی را داشته باشیم. نسبت‌مشترک (r) از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید:

$$\frac{S_{۲n}}{S_n} = ۱ + r^n$$

نکته در یک دنبالهٔ هندسی، نسبت مجموع n جملهٔ دوم به n جملهٔ اول برابر است با:

$$\frac{\overbrace{S_{۲n} - S_n}^{\text{مجموع n جملهٔ دوم}}}{\underbrace{S_n}_{\text{مجموع n جملهٔ اول}}} = r^n$$

مثلاً اگر در یک دنبالهٔ هندسی افزایشی مجموع ۸ جملهٔ اول ۱۳۶ و مجموع ۴ جملهٔ اول ۸ باشد، آن‌گاه با فرض $n = ۴$ می‌توانیم قدرنسبت دنباله را به دست آوریم:

$$\frac{S_{۲n}}{S_n} = ۱ + r^n \Rightarrow \frac{S_۸}{S_۴} = ۱ + r^۴ \Rightarrow ۱ + r^۴ = \frac{۱۳۶}{۸} = ۱۷ \Rightarrow r^۴ = ۱۶ \Rightarrow r = \pm ۲$$

چون دنبالهٔ ما افزایشی است؛ پس $r = ۲$ قابل قبول است.

۳۱۹- در یک دنبالهٔ هندسی مجموع ده جملهٔ اول، $(۱ + ۴\sqrt{۲})$ برابر مجموع ۵ جملهٔ اول است. در این دنباله مجموع ۲۰ جملهٔ دوم، چند برابر مجموع ۲۰ جملهٔ اول است؟

۱) ۲۵۶ ۲) ۵۱۲ ۳) ۱۰۲۴ ۴) ۲۰۴۸

به کمک رابطهٔ $\frac{S_{۲n} - S_n}{S_n} = r^n$ نسبت خواسته‌شده را تعیین کن. | به کمک رابطهٔ $\frac{S_{۲n}}{S_n} = ۱ + r^n$ قدرنسبت دنباله را تعیین کن.

۸ ترکیب دنباله‌های حسابی و هندسی

★★★★★

در کنکورهای اخیر، سؤال‌های این دو معادله حضور ثابت داشته‌اند! در این سؤالات:

گام اول: به کمک جملهٔ عمومی فرض مسئله را بیان می‌کنیم.

گام دوم: جملات دنبالهٔ اول را در دنبالهٔ دوم و اطلاعات آن جای‌گذاری می‌کنیم.

نکته هرگاه جملات a_p , a_n , a_m از یک دنبالهٔ حسابی، به ترتیب سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی باشند، آن‌گاه قدرنسبت دنبالهٔ هندسی از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید:

$$r = \frac{p-n}{n-m} , (p > n > m)$$

مثلاً اگر جملات سوم، هفتم و یازدهم یک دنبالهٔ حسابی جملات متوالی دنباله‌ای هندسی باشند، آن‌گاه:

$$r = \frac{۱۱-۷}{۷-۳} = \frac{۳}{۴}$$: قدرنسبت دنباله هندسی

۳۲۰- جملات z , y , x سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی و مجموع آن‌ها برابر ۲۱ است. اگر $x+۶ , y+۴ , z+۲$ یک دنبالهٔ هندسی باشد، مقدار $[\frac{xy}{z}]$ کدام است؟

(انسانی خارج ۱۴۰۲)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

z و x را در دنبالهٔ حسابی برحسب y بنویس. ← مجموع آن‌ها را برابر ۲۱ قرار بده و y را به دست بیار. ← جملات دنبالهٔ هندسی را برحسب y و d (اختلاف مشترک حسابی) بنویس. ← رابطهٔ مربوط به واسطهٔ هندسی را نوشته، d را محاسبه کن. ← z و x را محاسبه کرده و حاصل خواسته‌شده را به دست بیار.

۳۲۱- اگر z , y , x دنباله‌ای هندسی با جملات نابرابر و $x , ۳y , ۵z$ یک دنبالهٔ حسابی باشد، مقدار $[\frac{x}{z}]$ کدام است؟

(انسانی ۱۴۰۲)

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۹ ۴) ۲۵

z و y را برحسب x در دنبالهٔ هندسی بنویس. ← جملات دنبالهٔ حسابی را برحسب x و r به دست بیار. ← رابطهٔ واسطهٔ حسابی را نوشته، r را محاسبه کن. ← حاصل خواسته‌شده را به دست بیار.

۳۲۲- جملات دوم، پنجم و دوازدهم از یک دنبالهٔ حسابی می‌توانند سه جملهٔ متوالی از دنبالهٔ هندسی باشند، قدرنسبت (نسبت‌مشترک) دنبالهٔ هندسی کدام است؟ (جملات دنباله ثابت نیستند.)

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۷}{۴}$ ۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) $\frac{۷}{۳}$

جملات دنبالهٔ حسابی را برحسب $a_۱$ و d بنویس. ← رابطهٔ مربوط به واسطهٔ هندسی را برای آن‌ها بنویس. ← رابطهٔ بین $a_۱$ و d را به دست بیار. ← جملات دنباله را برحسب d بنویس. ← با تقسیم دو جملهٔ متوالی قدرنسبت را محاسبه کن.

۳۲۳- با ضرب سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی به ترتیب در ۴، ۸ و ۱۶، یک دنبالهٔ حسابی به دست می‌آید. اگر مجموع مربعات سه جملهٔ هندسی برابر مجموع جملات حسابی باشد، جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی کدام است؟

۱) $\frac{۳۲}{۷}$ ۲) $\frac{۶۴}{۷}$ ۳) $\frac{۲۴}{۵}$ ۴) $\frac{۴۸}{۵}$

سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ هندسی دلخواه را برحسب a و r بنویس. ← به کمک فرض، جملات دنبالهٔ حسابی را بساز. ← رابطهٔ مربوط به مجموع جملات که در سؤال آمده را بنویس. ← با ساده‌کردن این رابطه مقدار a را به دست بیار.

۳۲۴- جملهٔ پنجم یک دنبالهٔ حسابی با اختلاف‌مشترک (قدرنسبت) ناصفر، واسطهٔ هندسی بین جملات سوم و نهم آن دنباله است. اگر جملهٔ پنجم دنباله ۷ باشد، جملهٔ صد و یکم دنباله کدام است؟

(انسانی خارج ۱۴۰۰)

۱) ۲۰۰ ۲) ۱۷۵ ۳) ۱۵۰ ۴) ۱۲۵

جملات سوم، پنجم و نهم رابطهٔ حسابی دلخواه را بنویس. ← مقدار a را از این رابطه به دست بیار. ← مقدار a را در رابطهٔ جملهٔ پنجم قرار داده و d را محاسبه کن. ← جملهٔ صد و یکم را محاسبه کن.

$$n(A') = \underbrace{\binom{۲}{۱}}_{\text{یکی از والدین}}\underbrace{\binom{۲}{۲}}_{\text{دو پسر}}\underbrace{\binom{۳}{۲}}_{\text{دو دختر}} = ۲\times۱\times۳ = ۶$$

حالت دوم: والدین هر دو در مسافرت باشند:

در این حالت باید سه نفر از بین فرزندان انتخاب کنیم که دوتا پسر و یکی دختر هستند. *(بازم احتمال متمم)*

$$n(A'_۲) = \underbrace{\binom{۲}{۲}}_{\text{والدین}}\underbrace{\binom{۲}{۲}}_{\text{دو پسر}}\underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{یک دختر}} = ۱\times۱\times۳ = ۳$$

حالت سوم: والدین در مسافرت نباشند! *(قبول داری که اینم نامطلوبه!)*

در این حالت باید ۵ نفر از بین فرزندان انتخاب کنیم که دوتا پسر و سه‌تا دختر هستند. *(بازم احتمال متمم)*

$$n(A'_۳) = \underbrace{\binom{۲}{۲}}_{\text{دو پسر}}\underbrace{\binom{۳}{۳}}_{\text{یک دختر}} = ۱\times۱ = ۱$$

در نتیجه طبق اصل جمع تعداد حالات نامطلوب مسئله برابر $n(A') = ۶+۳+۱ = ۱۰$ است و داریم: $P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{۱۰}{۲۱}$

در نتیجه طبق احتمال متمم، احتمال آن‌که دو پسر با هم به مسافرت نروند برابر است با: $P(A) = ۱ - P(A') = ۱ - \frac{۱۰}{۲۱} = \frac{۱۱}{۲۱}$

۲۶۳ **گزینه ۴** فضای نمونه‌ای این آزمایش برابر انتخاب سه فرزند از بین ۵ فرزند این خانواده است که تعداد اعضای آن برابر است با:

$$n(S) = \binom{۵}{۳} = \binom{۵}{۲} = \frac{۵\times۴}{۲} = ۱۰$$

حالا به جای این‌که احتمال آن‌که دوقلوها با هم به مهمانی نروند *(که خیلی طول می‌کشه)*، احتمال متمم آن را به دست می‌آوریم. «دوقلوها با هم به مهمانی بروند: A'»

اگر دوقلوها با هم به مهمانی بروند با توجه به این‌که ۳تا از فرزندان می‌خواهند به مهمانی بروند، باید یکی از بین سه فرزند دیگر (به‌جز دوقلوها) انتخاب کنیم:

$$n(A') = \binom{۳}{۱} = ۳ \Rightarrow P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{۳}{۱۰} = ۰/۳$$

پس طبق احتمال متمم، احتمال آن‌که دوقلوها با هم به مهمانی نروند، برابر است با: $P(A) = ۱ - P(A') = ۱ - ۰/۳ = ۰/۷$

۲۶۴ **گزینه ۱** فضای نمونه‌ای مربوط به ماه‌های تولد این چهار نفر برابر است با: $n(S) = ۱۲^۴$

حالا، چهار جایگاه برای این ۴ نفر در نظر می‌گیریم. برای نفر اول ۱۲ حالت، برای نفر بعدی ۱۱ حالت و ... داریم. (ماه‌های تولد یکسان نیست.) در نتیجه تعداد حالات مطلوب برابر است با: $n(A) = ۱۲\times۱۱\times۱۰\times۹$

پس:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\cancel{۱۲}\times۱۱\times\overset{۵}{\cancel{۱۰}}\times\cancel{۹}}{\cancel{۱۲}\times\underset{۶}{\cancel{۱۲}}\times\underset{۴}{\cancel{۱۲}}\times\underset{۴}{\cancel{۱۲}}} = \frac{۵۵}{۹۶}$$

۲۶۵ **گزینه ۳** فضای نمونه‌ای مربوط به ماه‌های تولد این چهار نفر برابر است با: $n(S) = ۱۲^۵$

برای نفر اول ۱۲ حالت مختلف داریم. حالا با توجه به این‌که می‌خواهیم ماه تولد همگی یکسان باشد برای سایر افراد یک حالت داریم (ماه تولد آن‌ها با نفر اول یکسان است) در نتیجه حالات مطلوب مسئله برابر است با:

$$n(A) = ۱۲\times۱\times۱\times۱\times۱ = ۱۲$$

پس: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۲}{۱۲^۵} = \frac{۱}{۱۲^۴}$

۲۶۶ **گزینه ۴** فضای نمونه‌ای مربوط به روزهای تولد این سه نفر در هفته برابر است با: $n(S) = ۷^۳$

ابتدا حالاتی که هیچ دو نفری در یک روز هفته متولد نشده‌اند را محاسبه می‌کنیم. (نامطلوب مسئله) $n(A') = ۷\times۶\times۵$

در نتیجه داریم: $P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{۷\times۶\times۵}{۷\times۷\times۷} = \frac{۳۰}{۴۹}$

پس طبق احتمال متمم داریم: $P(A) = ۱ - P(A') = ۱ - \frac{۳۰}{۴۹} = \frac{۱۹}{۴۹}$

۲۶۷ **گزینه ۳** اولاً می‌دانیم چون A و B دو پیشامد ناسازگار هستند؛ پس $P(A\cap B) = ۰$ است.

از طرفی با توجه به جدول گفته‌شده، حاصل عبارت خواسته‌شده را کمی ساده‌تر می‌کنیم:

$$P(A'\cap B) + P(B'\cap A) = P(B\cap A') + P(A\cap B')$$
$$= (P(B) - P(B\cap A)) + (P(A) - P(A\cap B))$$
$$= (۰/۳ - ۰) + (۰/۴ - ۰) = ۰/۳ + ۰/۴ = ۰/۷$$

۲۶۸ **گزینه ۲** احتمال آن‌که در خانواده‌ای چهارفرزندی ۲ دختر داشته باشیم برابر است با:

$$P(A) = \frac{\binom{۴}{۲}}{۲^۴} = \frac{۶}{۱۶}$$

احتمال آن‌که در خانواده‌ای چهارفرزندی یک پسر داشته باشیم برابر است با:

$$P(B) = \frac{\binom{۴}{۱}}{۲^۴} = \frac{۴}{۱۶}$$

با توجه به این‌که این دو پیشامد ناسازگار هستند *(یکم فکر کن ۴تا بچه یک پسر، دوتا دختر آخری چی پس)*، پس $A\cap B = \varnothing$ است و $P(A\cap B) = ۰$ است.

در نتیجه احتمال آن‌که دو فرزند دختر $\overset{\text{اجتماع}}{\text{یا}}$ یک پسر در این خانواده باشد برابر است با:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$
$$= \frac{۶}{۱۶} + \frac{۴}{۱۶} - ۰ = \frac{۱۰}{۱۶} = \frac{۵}{۸}$$

۲۶۹ **گزینه ۱** با جای‌گذاری $n=۲$، $n=۳$ و $n=۴k$ به ترتیب در جملات عمومی a_n، b_n و c_n داریم:

$$a_n = \frac{(-۱)^n}{n^۲} \xrightarrow{n=۲} a_۲ = \frac{(-۱)^۲}{۲^۲} = \frac{۱}{۴}$$

$$b_n = ۲n \xrightarrow{n=۳} b_۳ = ۲(۳) = ۶$$

$$c_n = ۱ - (-۱)^{n+۱} \xrightarrow{n=۴k} c_{۴k} = ۱ - (-۱)^{\overset{\text{عددی فرد است.}}{۴k+۱}} = ۱ - (-۱) = ۲$$

در نتیجه داریم: $a_۲ - b_۳ + c_{۴k} = \frac{۱}{۴} - ۶ + ۲ = \frac{۱}{۴} - ۴ = \frac{-۱۵}{۴}$

تذکر در رابطه با توان‌های مختلف ۱- می‌دانیم:

۱) $(-۱)^{\text{زوج}} = ۱$ ۲) $(-۱)^{\text{فرد}} = -۱$

۲۷۰ **گزینه ۳** با مقداردهی به n در دنبالهٔ بازگشتی $a_{n+۲} = a_{n+۱} + a_n - n$، جملات مختلف دنباله را مشخص می‌کنیم:

$$n = ۱: a_۳ = a_۲ + a_۱ - ۱ = ۳ + ۳ - ۱ = ۵$$
$$n = ۲: a_۴ = a_۳ + a_۲ - ۲ = ۵ + ۳ - ۲ = ۶$$
$$n = ۳: a_۵ = a_۴ + a_۳ - ۳ = ۶ + ۵ - ۳ = ۸$$
$$n = ۴: a_۶ = a_۵ + a_۴ - ۴ = ۸ + ۶ - ۴ = ۱۰$$

$$n=۵: a_۷=a_۶+a_۵-۵=۱۰+۸-۵=۱۳$$
$$n=۶: a_۸=a_۷+a_۶-۶=۱۳+۱۰-۶=۱۷$$

در نتیجه جملهٔ هشتم دنباله برابر ۱۷ است.

۲۷۱ **گزینه ۴** با توجه به مشخص‌بودن مقدار جملات اول تا سوم در صورت سؤال، با مقداردهی به n در رابطهٔ بازگشتی داده‌شده، ابتدا مقادیر جملات هفتم و پنجم را یافته و سپس نسبت آن‌ها را به‌دست می‌آوریم:

رابطهٔ عمومی: $a_{n+۳}=a_n+a_{n+۱}+a_{n+۲}$

$$n=۱ \Rightarrow a_۴=a_۱+a_۲+a_۳=۲+۲+۲=۶$$
$$n=۲ \Rightarrow a_۵=a_۲+a_۳+a_۴ \Rightarrow a_۵=۲+۲+۶=۱۰$$
$$n=۳ \Rightarrow a_۶=a_۳+a_۴+a_۵ \Rightarrow a_۶=۲+۶+۱۰=۱۸$$
$$n=۴ \Rightarrow a_۷=a_۴+a_۵+a_۶ \Rightarrow a_۷=۶+۱۰+۱۸=۳۴$$

بنابراین نسبت جملهٔ هفتم به پنجم برابر است با: $\frac{a_۷}{a_۵}=\frac{۳۴}{۱۰}=۳/۴$

۲۷۲ **گزینه ۴** ابتدا رابطهٔ بازگشتی داده‌شده را بازنویسی می‌کنیم:

$$a_{n+۱}=\frac{۱}{a_n}+۱ \Rightarrow a_{n+۱}-۱=\frac{۱}{a_n} \Rightarrow a_n=\frac{۱}{a_{n+۱}-۱}$$

حالا به‌جای n در رابطهٔ بازگشتی داده‌شده مقادیر $n=۱۴,۱۵$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$n=۱۵ \Rightarrow a_{۱۵}=\frac{۱}{a_{۱۶}-۱}=\frac{۱}{\frac{۱۵۹۷}{۹۸۷}-۱}=\frac{۱}{\frac{۶۱۰}{۹۸۷}}=\frac{۹۸۷}{۶۱۰}$$
$$n=۱۴ \Rightarrow a_{۱۴}=\frac{۱}{a_{۱۵}-۱}=\frac{۱}{\frac{۹۸۷}{۶۱۰}-۱}=\frac{۱}{\frac{۳۷۷}{۶۱۰}}=\frac{۶۱۰}{۳۷۷}$$

۲۷۳ **گزینه ۲** با جای‌گذاری مقادیر مختلف n، در دنبالهٔ $a_{n-۱}=a_{n-\left[\frac{n}{۲}\right]}+۲a_{n-\left[\frac{n}{۳}\right]}$ جملات مختلف دنباله را به دست می‌آوریم:

$$n=۴ \Rightarrow a_۳=a_۲+۲a_۳ \Rightarrow -a_۳=۱ \Rightarrow a_۳=-۱$$
$$n=۵ \Rightarrow a_۴=a_۳+۲a_۴ \Rightarrow -a_۴=a_۳ \Rightarrow a_۴=۱$$
$$n=۶ \Rightarrow a_۵=a_۳+۲a_۴ \Rightarrow a_۵=-۱+۲=۱$$
$$n=۷ \Rightarrow a_۶=a_۴+۲a_۵ \Rightarrow a_۶=۱+۲=۳$$

بنابراین جملهٔ ششم که به ازای $n=۷$ به دست می‌آید برابر ۳ است.

۲۷۴ **گزینه ۱** با جای‌گذاری $n=۱$ و $n=۲$ در رابطهٔ بازگشتی داده‌شده داریم:

$$a_{n+۱}=\frac{۱}{۲}\left(a_n+\frac{a_۱}{a_n}\right) \xrightarrow{n=۲} a_۳=\frac{۱}{۲}\left(a_۲+\frac{a_۱}{a_۲}\right) \Rightarrow \frac{۱۷}{۱۲}=\frac{۱}{۲}\left(a_۲+\frac{k}{a_۲}\right)$$
$$a_{n+۱}=\frac{۱}{۲}\left(a_n+\frac{a_۱}{a_n}\right) \xrightarrow{n=۱} a_۲=\frac{۱}{۲}\left(a_۱+\frac{a_۱}{a_۱}\right)=\frac{۱}{۲}(k+۱)$$

حالا با جای‌گذاری مقدار $a_۲$ در رابطهٔ اول داریم:

$$\frac{۱۷}{۱۲}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}(k+۱)+\left(\frac{k}{\frac{۱}{۲}(k+۱)}\right)\right)=\frac{۱}{۴}k+\frac{۱}{۴}+\frac{k}{k+۱}$$
$$\Rightarrow \frac{۱۷}{۱۲}-\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۴}k+\frac{k}{k+۱} \Rightarrow \frac{۱۴}{\cancel{۱۲}_{۳}}=\frac{k(k+۱)+۴k}{\cancel{۴}(k+۱)}$$
$$\Rightarrow ۳k^۲+۱۵k=۱۴k+۱۴$$

حالا با حل معادلهٔ $۳k^۲+k-۱۴=۰$ مقدار k را به دست می‌آوریم:

$$\Delta=(۱)^۲-۴(۳)(-۱۴)=۱۶۹$$
$$\Rightarrow k=\frac{-۱\pm\overset{۱۳}{\sqrt{۱۶۹}}}{۲(۳)}=\begin{cases}\frac{-۱-۱۳}{۶}=\frac{-۱۴}{۶} \ \times \\ \frac{-۱+۱۳}{۶}=\frac{۱۲}{۶}=۲ \ \checkmark\end{cases}$$

۲۷۵ **گزینه ۳** چند جملهٔ ابتدایی دنباله را می‌نویسیم:

$$n=۱ \Rightarrow a_۲=\frac{۱}{۱+a_۱} \Rightarrow a_۲=\frac{۱}{۲}$$
$$n=۲ \Rightarrow a_۳=۱$$
$$n=۳ \Rightarrow a_۴=\frac{۱}{۱+a_۳} \Rightarrow a_۴=\frac{۱}{۲}$$
$$\vdots$$

پس ضابطهٔ دنباله به صورت $a_n=\begin{cases}۱ & \text{فرد } n\\ \frac{۱}{۲} & \text{زوج } n\end{cases}$ است و در نتیجه جملهٔ چهارصدم *(که شمارهٔ آن زوج است)* برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

۲۷۶ **گزینه ۳** در دو عدد متوالی (شمارهٔ جملات) حتماً یکی زوج و یکی فرد است، یعنی برای داشتن دو جملهٔ متوالی باید شمارهٔ یکی از آن‌ها زوج (ضابطهٔ بالا) و شمارهٔ دیگری فرد باشد. (ضابطهٔ پایین)

از طرف دیگر طبق فرض مسئله مقدار این دو جمله عددی صحیح است؛ پس حاصل $\frac{۲}{۱۵}n$ برای nهای فرد باید صحیح باشد؛ یعنی n مضرب ۱۵ است.

حالا از $n=۱۵$ شروع می‌کنیم. برای آن‌که دو جملهٔ متوالی داشته باشیم $n=۱۵$ را به عنوان شمارهٔ فرد و $n=۱۶,۱۴$ را به عنوان شمارهٔ زوج جای‌گذاری می‌کنیم.

$$a_n=\begin{cases}۱۰۰-\frac{۱}{۲}n^۲ & \text{زوج } n\\ \frac{۲}{۱۵}n & \text{فرد } n\end{cases} \xrightarrow{n=۱۴} a_{۱۴}=۱۰۰-\frac{۱}{۲}(۱۴)^۲=۲$$
$$\xrightarrow{n=۱۵} a_{۱۵}=\frac{۲}{۱۵}(۱۵)=۲ \xrightarrow{n=۱۶} a_{۱۶}=۱۰۰-\frac{۱}{۲}(۱۶)^۲=-۲۸$$

در نتیجه جملات چهاردهم و پانزدهم، با هم برابر است؛ پس مقدار $k=۲$ است و داریم: $k-a_{۱۶}=۲-(-۲۸)=۳۰$

۲۷۷ **گزینه ۴** می‌دانیم جملات دنبالهٔ مثلثی به صورت $۱,۳,۶,۱۰,\dots$ می‌باشد. حالا اگر از جملات این دنباله یک واحد کم کنیم، جملات آن به صورت زیر خواهد بود:

جملهٔ دوم دنبالهٔ مثلثی

$$a_n: ۱,۲,۴,۷,۱۱,\dots \Rightarrow a_n-۱: ۰,۱,۳,۶,۱۰,\dots$$

جملهٔ اول دنبالهٔ مثلثی

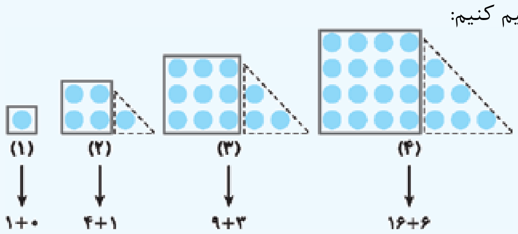
همان‌طور که می‌بینیم جملهٔ nام در دنبالهٔ جدید برابر جملهٔ $(n-۱)$ام در دنبالهٔ مثلثی است.

در نتیجه باید به جای n در جملهٔ عمومی دنبالهٔ مثلثی (یعنی $\frac{n(n+۱)}{۲}$) مقدار $n-۱$ را قرار دهیم، در نتیجه داریم:

$$a_n-۱=\frac{(n-۱)(n-۱+۱)}{۲}=\frac{(n-۱)n}{۲} \Rightarrow a_n=\frac{n(n-۱)}{۲}+۱$$

پس جملهٔ دهم این دنباله برابر است با: $a_{۱۰}=\frac{۱۰\times۹}{۲}+۱=۴۵+۱=۴۶$

۲۷۸ **گزینه ۱** می‌توانیم شکل‌های داده‌شده را به صورت زیر، به دو دنباله تقسیم کنیم:



می‌بینید که یک دنبالهٔ مربعی داریم و یک دنبالهٔ مثلثی؛ پس دنبالهٔ مربوط به تعداد دایره‌ها برابر مجموع دو دنبالهٔ مربعی و مثلثی است:

$$\text{دنبالهٔ مربعی} \Rightarrow ۱,۴,۹,۱۶,\dots \Rightarrow n^۲$$

دنبالهٔ مثلثی $\Rightarrow 0,1,3,6,\ldots \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2}$

در نتیجه تعداد دایره‌ها در مرحلهٔ nام از رابطهٔ $a_n = n^2 + \frac{n(n-1)}{2}$ به دست می‌آید و تعداد دایره‌ها در شکل نهم برابر است با:

$$a_9 = 9^2 + \frac{9\times \cancel{8}^{\,4}}{\cancel{2}} = 81+36 = 117$$

توجه در دنبالهٔ مثلثی، جملات از یک شروع می‌شود و جملهٔ عمومی آن به صورت $\frac{n(n+1)}{2}$ است، اما در این مسئله با توجه به این‌که از صفر شروع می‌شود جملهٔ nام برابر جملهٔ $(n-1)$ام دنبالهٔ مثلثی است. *(یه کم فکر کن!)*

۲۷۹ گزینه ۱ در دنبالهٔ فیبوناچی هر جمله از مجموع دو جملهٔ قبلی به دست می‌آید، با توجه به این‌که دو جملهٔ اولیهٔ دنباله برابر ۱ است از جملهٔ سوم شروع کرده و جملات متوالی دنباله را می‌نویسیم تا به جملهٔ یازدهم برسیم:

$a_1 = 1$

$a_2 = 1$

$a_3 = 1+1 = 2$

$a_4 = 1+2 = 3$

$a_5 = 2+3 = 5$

$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89 \Rightarrow a_{11} = 89$

۲۸۰ گزینه ۲ جملات مختلف دنباله (تعداد شکل‌های هر مرحله) را می‌نویسیم:

شمارهٔ شکل	۱	۲	۳
تعداد دایره‌ها	۵	۸	۱۱

$+3 \quad +3$

همان‌طور که می‌بینیم تعداد شکل‌های هر مرحله از دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت $d=3$ و جملهٔ اول $a_1=5$ می‌باشد؛ پس جملهٔ عمومی آن برابر است با:

$$a_n = \underbrace{a_1}_{5} + (n-1)\underbrace{d}_{3} = 5+3n-3 = 3n+2$$

در نتیجه تعداد دایره‌ها در مرحلهٔ پانزدهم و سیزدهم برابر است با:

$a_{15} = 3(15)+2 = 47$

$a_{13} = 3(13)+2 = 41$

بنابراین اختلاف آن‌ها برابر است با: $47-41=6$

۲۸۱ گزینه ۱ با توجه به این‌که $a_1=3$ و $a_5=11$ است، به کمک جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی داریم:

$$a_n = \underbrace{a_1}_{3} + (n-1)d \xrightarrow{a_5=11} 11 = 3+(5-1)d$$

$$\Rightarrow 8 = 4d \Rightarrow d = 2$$

پس جملهٔ عمومی دنباله به صورت زیر است:

$$a_n = a_1+(n-1)d \xrightarrow{a_1=3,\,d=2} a_n = 3+(n-1)(2) = 2n+1$$

در نتیجه جملهٔ دهم برابر است با: $a_{10} = 2(10)+1 = 21$

۲۸۲ گزینه ۳ به کمک جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی، رابطهٔ مربوط به جملات سوم، پنجم و سیزدهم را می‌نویسیم:

$$a_n = a_1+(n-1)d \rightarrow \begin{cases} a_3 = a_1+2d \\ a_5 = a_1+4d \\ a_{13} = a_1+12d \end{cases}$$

طبق فرض مسئله مجموع این سه جمله برابر ۷۵ است، پس می‌توان نوشت:

$$a_3+a_5+a_{13} = 75 \Rightarrow a_1+2d+a_1+4d+a_1+12d = 75$$

$$\Rightarrow 3a_1+18d = 75 \Rightarrow a_1+6d = 25$$

حالا با توجه به این‌که $a_7 = a_1+6d$ است؛ داریم:

$$a_1+6d = 25 \Rightarrow a_7 = 25$$

۲۸۳ گزینه ۲ فرض مسئله را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

جملهٔ سوم + جملهٔ بیست و هشتم = جملهٔ پنجم +۶۱ $\Rightarrow a_3+a_{28} = a_5+61$

حالا به جای جملات دنباله، به کمک جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی $(a_n = a_1+(n-1)d)$، مقدار هر جمله را قرار می‌دهیم:

$$\underbrace{a_3}_{a_1+2d} + \underbrace{a_{28}}_{a_1+27d} = \underbrace{a_5}_{a_1+4d} + 61 \Rightarrow 2a_1+29d = a_1+4d+61$$

$$\Rightarrow \underbrace{a_1+25d}_{a_{26}} = 61 \Rightarrow a_{26} = 61$$

(توجه داریم که جملهٔ بیست و ششم دنبالهٔ حسابی برابر $a_{26} = a_1+25d$ است.)

۲۸۴ گزینه ۲ در دنبالهٔ حسابی داده‌شده با جملهٔ اول ۲۰۸ و قدرنسبت -4، ابتدا جملهٔ nام این دنباله را پیدا می‌کنیم:

$$a_1 = 208, d = -4 \Rightarrow a_n = a_1+(n-1)d$$

$$\Rightarrow a_n = 208+(n-1)(-4) = 208-4n+4 \Rightarrow a_n = -4n+212$$

حالا برای آن‌که ببینیم شمارهٔ کدام جمله برابر صفر است، باید جملهٔ عمومی دنباله را برابر صفر قرار دهیم، داریم:

$$a_n = -4n+212 = 0 \Rightarrow 4n = 212 \Rightarrow n = \frac{212}{4} = 53$$

بنابراین جملهٔ پنجاه و سوم برابر صفر است.

۲۸۵ گزینه ۳ $a_8+a_9 = 110 \Rightarrow a_1+7d+a_1+8d = 110$

$$\Rightarrow 2a_1+15d = 110 \xrightarrow{a_1=10} 20+15d = 110$$

$$\Rightarrow 15d = 90 \Rightarrow d = \frac{90}{15} = 6$$

با توجه به این‌که قدرنسبت برابر ۶ و جملهٔ اول برابر ۱۰ است، به محاسبهٔ جملهٔ ششم می‌پردازیم:

$$a_6 = a_1+5d \Rightarrow a_6 = 10+5(6) = 10+30 = 40$$

۲۸۶ گزینه ۱ با استفاده از دنبالهٔ داده‌شده، جملهٔ اول و قدرنسبت مشخص است. ابتدا کافی است جملات چهارم و هفتم را یافته، سپس واسطهٔ حسابی بین آن‌ها را مشخص کنیم:

$d = 14-8 = 6$

$a_4 = a_1+3d = 8+3(6) = 8+18 = 26$

$a_7 = a_1+6d = 8+6(6) = 8+36 = 44$

حالا باید واسطهٔ حسابی بین جملهٔ چهارم و هفتم بنویسیم و داریم:

واسطهٔ حسابی $= \frac{a_4+a_7}{2} = \frac{26+44}{2} = \frac{70}{2} = 35$

۲۸۷ گزینه ۴ با توجه به صورت سؤال، $a_1 = 16$ و $a_8 = 44$ است. حالا می‌خواهیم ببینیم چند واسطه بین دو عدد گفته‌شده درج کنیم تا در شرط داده‌شده صدق کند، بنابراین ابتدا قدرنسبت دنباله را پیدا می‌کنیم:

$$d = \frac{a_8-a_1}{8-1} = \frac{44-16}{7} = \frac{28}{7} = 4$$

حالا تعداد واسطه‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$d = \frac{b-a}{m+1} \Rightarrow 4 = \frac{64-16}{m+1} \Rightarrow 4 = \frac{48}{m+1}$$

$$\Rightarrow 48 = 4m+4 \Rightarrow 44 = 4m \Rightarrow m = 11$$

بنابراین ۱۱ واسطهٔ حسابی می‌توانیم درج کنیم.

۲۸۸ گزینه ۱ روابط مربوط به جملات اول، دوم و سوم (یعنی $a_۱$، $a_۲=a_۱+d$ و $a_۳=a_۱+۲d$) را در رابطهٔ $۶a_۲^۲=۵a_۳a+۳a_۲a$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$۶(a+d)^۲=۵(a+۲d)a+۳(a+d)a$$

$$\Rightarrow ۶a^۲+۱۲ad+۶d^۲=۵a^۲+۱۰ad+۳a^۲+۳ad$$

$$\Rightarrow ۲a^۲-۶d^۲+ad=۰$$

حالا اگر فرض کنیم $\frac{a}{d}=x$ است، آن‌گاه $a=dx$ است و داریم:

$$\Rightarrow ۲d^۲x^۲-۶d^۲+d^۲x=۰ \Rightarrow d^۲(۲x^۲+x-۶)=۰$$

$$\Rightarrow (۲x-۳)(x+۲)=۰ \Rightarrow x=\frac{۳}{۲}, x=-۲$$

حالا نسبت جملهٔ چهارم به d را به دست آورده و مقادیر x را در آن جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{a_۴}{d}=\frac{a+۳d}{d}=\frac{a}{d}+۳=x+۳:\begin{cases}x=-۲: x+۳=۱\\ x=\frac{۳}{۲}: x+۳=۴/۵\end{cases}$$

۲۸۹ گزینه ۴ در دنباله‌ای حسابی با جملهٔ اول $a_۱$ و اختلاف‌مشترک $d=-۰/۵$، مجموع دوازده جملهٔ اول برابر ۹ است؛ پس طبق فرمول $S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)$ داریم:

$$S_{۱۲}=\frac{\cancel{۱۲}^{\,۶}}{\cancel{۲}}(۲a_۱+\underbrace{(۱۱\times(-۰/۵))}_{\frac{-۱۱}{۲}})=۹ \Rightarrow ۱۲a_۱-۳۳=۹$$

$$\Rightarrow a_۱=\frac{۴۲}{۱۲} \Rightarrow a_۱=\frac{۷}{۲}$$

۲۹۰ گزینه ۴ مجموع جملات هفتم تا هجدهم برابر است با تفاضل مجموع هجده جملهٔ اول و شش جملهٔ اول، در نتیجه کافی است $S_{۱۸}$ و $S_۶$ را به کمک رابطهٔ $S_n=\frac{n(n-۱۵)}{۶}$ به دست آورده و از هم کم کنیم:

$$a_۷+a_۸+a_۹+\cdots+a_{۱۸}=S_{۱۸}-S_۶=\frac{۱۸(۱۸-۱۵)}{۶}-\frac{۶(۶-۱۵)}{۶}$$

$$=۳(۱۸-۱۵)-(۶-۱۵)=۳(۳)-(-۹)=۹+۹=۱۸$$

۲۹۱ گزینه ۴ طبق فرض مسئله جملهٔ هفتم، نصف جملهٔ سوم است؛ پس با توجه به جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی $(a_n=a_۱+(n-۱)d)$ داریم:

$$a_۷=\frac{۱}{۲}a_۳ \Rightarrow a_۱+۶d=\frac{۱}{۲}(a_۱+۲d) \xrightarrow{\times ۲} ۲a_۱+۱۲d$$

$$=a_۱+۲d \Rightarrow a_۱=-۱۰d$$

حالا طبق فرض مسئله می‌خواهیم مجموع n جملهٔ متوالی، برابر صفر شود، با جای‌گذاری رابطهٔ $a_۱=-۱۰d$ در رابطهٔ مجموع جملات دنبالهٔ حسابی می‌توان نوشت:

$$S_n=۰ \Rightarrow \frac{n}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d]=۰$$

$$\xrightarrow{a_۱=-۱۰d} \frac{n}{۲}[۲(-۱۰d)+(n-۱)d]=۰$$

حالا با توجه به این‌که $n\neq ۰$ است *(شمارهٔ جمله صفر نیست)* داریم:

$$-۲۰d+(n-۱)d=۰ \Rightarrow (n-۱)\cancel{d}=۲۰\cancel{d} \Rightarrow n-۱=۲۰ \Rightarrow n=۲۱$$

در نتیجه مجموع ۲۱ جملهٔ اول این دنباله برابر صفر است.

۲۹۲ گزینه ۱ دنباله‌ای حسابی با جملهٔ اول $a_۱$ و قدرنسبت d را در نظر می‌گیریم. طبق فرض مسئله $S_{۱۲}=۱۳۸$ و $a_۶=۱۰$ است. روابط مربوط به مجموع جملات $(S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d))$ و جملهٔ عمومی $(a_n=a_۱+(n-۱)d)$ را می‌نویسیم:

$$S_{۱۲}=۱۳۸ \Rightarrow \frac{۱۲}{۲}(۲a_۱+۱۱d)=۱۳۸ \Rightarrow ۶(۲a_۱+۱۱d)=۱۳۸$$

$$\Rightarrow ۲a_۱+۱۱d=۲۳$$

$$a_۶=۱۰ \Rightarrow a_۱+۵d=۱۰$$

حالا با حل دستگاه دو معادله ـ دو مجهول زیر مقادیر a و d را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}۲a_۱+۱۱d=۲۳\\ a_۱+۵d=۱۰ \xrightarrow{\times(-۲)}\end{cases}\begin{cases}۲a_۱+۱۱d=۲۳\\ -۲a_۱-۱۰d=-۲۰\end{cases}\xrightarrow{(+)} d=۳$$

با جای‌گذاری $d=۳$ در معادلهٔ $a_۱+۵d=۱۰$، مقدار $a_۱=-۵$ به دست می‌آید.

۲۹۳ گزینه ۲ با توجه به این‌که جملهٔ عمومی دنباله به صورت $a_n=\frac{۳}{۲}n-۵$ است، جملات اول و پانزدهم را محاسبه می‌کنیم:

$$a_n=\frac{۳}{۲}n-۵ \Rightarrow \begin{cases} a_۱=\frac{۳}{۲}-۵=-\frac{۷}{۲}\\ a_{۱۵}=\frac{۳}{۲}(۱۵)-۵=\frac{۴۵}{۲}-\frac{۱۰}{۲}=\frac{۳۵}{۲}\end{cases}$$

حال با توجه به رابطهٔ $S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$، مجموع پانزده جملهٔ اول را به دست می‌آوریم:

$$S_{۱۵}=\frac{۱۵}{۲}(-\frac{۷}{۲}+\frac{۳۵}{۲})=\frac{۱۵}{۲}\times\frac{۲۸}{۲}=۷\times۱۵=۱۰۵$$

نکته همیشه با داشتن جملهٔ عمومی دنباله و خواستن مجموع تعدادی از جملات، جملات اول و آخر را با جملهٔ عمومی یافته و سپس مجموع آن‌ها را با فرمول دوم مجموع جملات پیدا می‌کنیم.

۲۹۴ گزینه ۲ چند عدد اولیه بخش‌پذیر بر ۳ را می‌نویسیم:

$$\overset{d=-۳}{۱۵۰,۱۴۷},۱۴۴,۱۴۱,\ldots$$

همان‌طور که می‌بینیم با دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $a_۱=۱۵۰$ و اختلاف‌مشترک $d=-۳$ مواجه هستیم؛ پس مجموع سی و پنج جملهٔ دنباله را مشخص می‌کنیم:

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d) \Rightarrow$$

$$S_{۳۵}=\frac{۳۵}{۲}\times(۲\times۱۵۰+(۳۵-۱)(-۳))=\frac{۳۵}{۲}\times(۳۰۰-۱۰۲)=۳۴۶۵$$

۲۹۵ گزینه ۳ در دنبالهٔ $۱,x,y,\frac{۵}{۲},\ldots$ جملهٔ اول برابر ۱ و جملهٔ چهارم برابر $\frac{۵}{۲}$ است، در نتیجه با استفاده از جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی می‌توان نوشت:

$$a_n=a_۱+(n-۱)d \Rightarrow a_۴=a_۱+۳d$$

$$\xrightarrow{a_۱=۱,\ a_۴=\frac{۵}{۲}} \frac{۵}{۲}=۱+۳d \Rightarrow ۳d=\frac{۳}{۲} \Rightarrow d=\frac{۱}{۲}$$

حالا $a_۱=۱$ و $d=\frac{۱}{۲}$ را در فرمول $S_n=\frac{n}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d]$ جای‌گذاری کرده و مجموع پانزده جملهٔ اول را به دست می‌آوریم:

$$S_{۱۵}=\frac{۱۵}{۲}(۲a_۱+۱۴d)=۱۵(a_۱+۷d) \Rightarrow S_{۱۵}=۱۵(۱+\frac{۷}{۲})$$

$$=۱۵\times\frac{۹}{۲}=۱۵\times۴/۵=۶۷/۵$$

۲۹۶ **گزینه ۳** مجموع پنج جملهٔ دوم یعنی $a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}$ برابر $S_{10}-S_5$ است. از طرفی طبق فرض مسئله مجموع پنج جملهٔ اول، $\frac{1}{3}$ مجموع پنج جملهٔ بعدی است. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$S_5=\frac{1}{3}(S_{10}-S_5)\xrightarrow{\times 3}3S_5=S_{10}-S_5\Rightarrow S_{10}=4S_5$$

حالا با جای‌گذاری روابط S_5 و S_{10} به کمک فرمول $S_n=\frac{n}{2}(a_1+(n-1)d)$ در این رابطه داریم:

$$S_{10}=4S_5\Rightarrow\frac{10}{2}(2a_1+9d)=4\times\frac{5}{2}(2a_1+4d)$$

$$\Rightarrow 5(2a_1+9d)=10(2a_1+4d)\Rightarrow 10a_1+45d=20a_1+40d$$

$$\Rightarrow 10a_1=5d\Rightarrow d=2a_1$$

در نتیجه نسبت جملهٔ دوم به جملهٔ اول در این دنباله برابر است با:

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_1+d}{a_1}\xrightarrow{d=2a_1}\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_1+2a_1}{a_1}=\frac{3a_1}{a_1}=3$$

۲۹۷ **گزینه ۴** در یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a و قدرنسبت d، مجموع بیست جملهٔ اول برابر است با:

$$S_{20}=\frac{20}{2}(2a_1+19d)=10(2a_1+19d)=20a_1+190d$$

حالا اگر یک واحد به اختلاف‌مشترک دنباله اضافه کنیم، دنباله‌ای حسابی با اختلاف‌مشترک $d+1$ و جملهٔ اول a داریم که در این حالت مجموع بیست جملهٔ اول برابر است با:

$$S'_{20}=\frac{20}{2}[2a_1+19(d+1)]=10(2a_1+19d+19)$$

$$=\underbrace{20a_1+190d}_{S_{20}}+190$$

در نتیجه $S'_{20}=S_{20}+190$ و در حالت دوم مجموع جملات، ۱۹۰ واحد بیشتر می‌شود.

۲۹۸ **گزینه ۱** در دنباله‌ای حسابی با جملهٔ اول a و قدرنسبت d، مجموع نه جملهٔ اول برابر ۹۰ است؛ پس طبق رابطهٔ $S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$ داریم:

$$S_9=90\Rightarrow 90=\frac{9}{2}(2a_1+8d)\Rightarrow 2a_1+8d=20\Rightarrow a_1+4d=10$$

از طرفی طبق فرض مسئله جملهٔ هفتم برابر ۱۳ است، در نتیجه به کمک جملهٔ عمومی دنباله داریم:

$$a_7=13\Rightarrow 13=a_1+6d$$

حالا با حل دستگاه دو معادله ـ دو مجهول زیر، اختلاف‌مشترک دنباله (d) را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}a_1+4d=10\\a_1+6d=13\end{cases}\xrightarrow{(-)}2d=3\Rightarrow d=\frac{3}{2}=1/5$$

۲۹۹ **گزینه ۱** طبق فرض مسئله مجموع ده جملهٔ اول برابر -26 است. اگر فرض کنیم جملهٔ اول دنباله، a و اختلاف‌مشترک آن d است، طبق رابطهٔ $S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$ داریم:

$$S_{10}=-26\Rightarrow\frac{10}{2}(2a_1+9d)=-26\Rightarrow 10a_1+45d=-26$$

از طرفی نسبت جملهٔ پانزدهم به جملهٔ ششم برابر ۶ است؛ پس با توجه به رابطهٔ جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی ($a_n=a_1+(n-1)d$) داریم:

$$\frac{a_{15}}{a_6}=6\Rightarrow\frac{a_1+14d}{a_1+5d}=6\Rightarrow 6a_1+30d=a_1+14d$$

$$\Rightarrow 5a_1+16d=0$$

حال با حل دستگاه دو معادله ـ دو مجهول زیر، اختلاف‌مشترک دنباله (d) را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}10a_1+45d=-26\\5a_1+16d=0\end{cases}\xrightarrow{\times(-2)}\begin{cases}10a_1+45d=-26\\-10a_1-32d=0\end{cases}$$

$$\xrightarrow{+}13d=-26\Rightarrow d=-2$$

با داشتن مقدار $d=-2$، ابتدا جملهٔ اول را یافته و سپس به سراغ پیداکردن جملهٔ یازدهم می‌رویم:

$$d=-2\xrightarrow{\text{جای‌گذاری}}10a_1+45d=-26$$

$$\Rightarrow 10a_1+45(-2)=-26\Rightarrow 10a_1=-26+90=64\Rightarrow a_1=6/4$$

جملهٔ یازدهم: $a_{11}=a_1+10d$

$$\Rightarrow a_{11}=6/4+10(-2)=6/4-20=-13/6$$

۳۰۰ **گزینه ۱** طبق فرض مسئله در بیست جمله از دنبالهٔ حسابی، مجموع جملات ردیف فرد، ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج، ۱۵۰ است. با توجه به این‌که در بیست جملهٔ اول دنباله، ده‌تا جملهٔ ردیف فرد و ده‌تا جملهٔ ردیف زوج است، داریم:

$$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19}=135$$

$$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20}=150$$

جملات ردیف فرد a_1، $a_3=a_1+2d$، $a_5=a_1+4d$ و ... هستند، این جملات، دنباله‌ای حسابی با جملهٔ اول a_1 و اختلاف‌مشترک $2d$ و جملات ردیف زوج a_2، $a_4=a_2+2d$، $a_6=a_2+4d$ است، این جملات دنباله‌ای حسابی با جملهٔ اول a_2 و اختلاف‌مشترک $2d$ است؛ پس داریم:

دنباله‌ای با قدرنسبت $2d$ و جملهٔ اول a_1: $S=\frac{10}{2}(2a_1+9(2d))$

$$=5(2a_1+18d)=135\Rightarrow 2a_1+18d=27$$

دنباله‌ای با قدرنسبت $2d$ و جملهٔ اول a_2: $S=\frac{10}{2}(2a_2+9(2d))$

$$=5(2a_2+18d)=150\Rightarrow 2a_2+18d=30$$

پس باید دستگاه دو معادله ـ دو مجهول زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases}2a_2+18d=30\\2a_1+18d=27\end{cases}\xrightarrow{(-)}2(a_2-a_1)=3$$

با توجه به این‌که $a_2-a_1=d$ است، $2d=3$ و در نتیجه $d=\frac{3}{2}$ خواهد بود. حالا $d=\frac{3}{2}$ را در رابطهٔ $2a_1+18d=27$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$2a_1+18(\frac{3}{2})=27\Rightarrow 2a_1+27=27\Rightarrow a_1=0$$

۳۰۱ **گزینه ۱** **نکته** اگر تعداد فرد جملهٔ متوالی با هم جمع شوند، (مثلاً سه‌تا، پنج‌تا و ...) حاصل، برابر تعداد جملات، ضرب در جملهٔ وسط است.

مثلاً: اگر مجموع ۷ جملهٔ متوالی از دنباله‌ای حسابی، برابر ۹۱ باشد آن‌گاه داریم:

$$\underbrace{a_1+a_2+a_3+\overset{\text{جملهٔ وسط}}{a_4}+a_5+a_6+a_7}_{7a_4}=91\Rightarrow 7a_4=91$$

$$\Rightarrow a_4=\frac{91}{7}=13$$

مجموع پنج جملهٔ متوالی دنبالهٔ حسابی برابر حاصل‌ضرب تعداد جملات در جملهٔ وسط (یعنی a_3) است؛ با توجه به فرض مسئله این مجموع برابر ۶۰ است؛ پس داریم:

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=\underset{\text{تعداد جملات}}{5}\,\underset{\text{جملهٔ وسط}}{a_3}\Rightarrow 5a_3=60$$

$$\Rightarrow a_3=\frac{60}{5}=12\Rightarrow a+2d=12$$

از طرفی مجموع دو جملهٔ بزرگ‌تر (a_4+a_5)، ۳ برابر مجموع دو جملهٔ کوچک‌تر (a_1+a_2) است؛ پس می‌توان نوشت:

$$a_4+a_5=3(a_1+a_2)\Rightarrow (a+3d)+(a+4d)=3[a+(a+d)]$$
$$\Rightarrow 2a+7d=3(2a+d)$$
$$\Rightarrow 2a+7d=6a+3d \Rightarrow 4d=4a \Rightarrow a=d$$

حالا با جای‌گذاری $a=d$ در رابطهٔ $a+2d=12$ داریم:

$$d+2d=12\Rightarrow 3d=12\Rightarrow d=4$$

۳۰۲ **گزینه ۳** طبق اطلاعات مسئله، تعداد صندلی‌های ردیف‌های متوالی این سالن به صورت مقابل است:

$$8 \xrightarrow{+4} 12 \xrightarrow{+4} 16,\dots$$

همان‌طور که می‌بینیم، این اعداد تشکیل یک دنبالهٔ حسابی می‌دهند که در آن $a_1=8$ و $d=4$ است. از طرفی چون سالن دارای ۱۲ ردیف است، تعداد جملات این دنباله برابر ۱۲ است؛ یعنی $n=12$؛ پس مجموع تعداد صندلی‌ها برابر است با:

$$S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$$
$$\Rightarrow S_{12}=\frac{\overset{6}{\cancel{12}}}{\cancel{2}}[\underbrace{2(8)}_{16}+\underbrace{(12-1)\times 4}_{44}]=6\times 60=360$$

حالا می‌خواهیم با نصف این تعداد صندلی یعنی $\frac{360}{2}=180$ صندلی سالن جدیدی بسازیم.

تعداد صندلی‌های ردیف اول سالن جدید ۴تا است و نظم آن هم همان نظم قبلی است (۴تا ۴تا اضافه می‌شود)؛ پس تعداد صندلی‌های آن به صورت مقابل است:

$$4 \xrightarrow{+4} 8 \xrightarrow{+4} 12,\dots$$

همان‌طور که می‌بینید، صندلی‌های سالن جدید هم تشکیل دنباله‌ای حسابی می‌دهند که در آن $a_1=4$ و $d=4$ است. حالا می‌خواهیم ببینیم با ۱۸۰ صندلی چند ردیف می‌توانیم بسازیم یا به عبارت دیگر، مجموع چند جملهٔ اول این دنبالهٔ حسابی برابر ۱۸۰ است:

$$S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]=\frac{n}{2}[\underbrace{2(4)}_{8}+\underbrace{(n-1)(4)}_{4n-4}]$$
$$=\frac{n}{2}[4n+4]=\frac{n\times4\times(n+1)}{2}=2\times n(n+1)$$

حالا S_n را برابر ۱۸۰ قرار می‌دهیم:

$$\cancel{2}n(n+1)=\overset{90}{\cancel{180}}\Rightarrow n(n+1)=90=9\times10 \quad (n=9)$$

۳۰۳ **گزینه ۳** ابتدا نسبت داده‌شده در صورت سؤال را به زبان ریاضی می‌نویسیم، سپس با استفاده از روابط دنبالهٔ هندسی قدرنسبت را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{a_9}{a_6}=5\Rightarrow\frac{\cancel{a_1}r^8}{\cancel{a_1}r^5}=5\Rightarrow r^3=5$$

حالا به سراغ نسبت جملهٔ دهم به جملهٔ چهارم می‌رویم:

$$\frac{a_{10}}{a_4}=\frac{\cancel{a_1}r^9}{\cancel{a_1}r^3}=r^6=(r^3)^2=(5)^2=25$$

توجه دقت کنید که $r^3=5$ عددی صحیح در نمی‌آید، بنابراین سعی می‌کنیم که از این مقدار به دست آمده به نحوی در ادامهٔ حل سؤال استفاده کنیم.

۳۰۴ **گزینه ۴** طبق فرض مسئله جملهٔ هشتم، ۸۱ برابر جملهٔ چهارم است؛ پس طبق رابطهٔ $a_n=a_1\times r^{n-1}$ می‌توان نوشت:

$$\frac{a_8}{a_4}=81\Rightarrow\frac{a_1r^7}{a_1r^3}=81\Rightarrow r^4=81\Rightarrow r=\pm3$$

حالا با توجه به این‌که جملهٔ سوم دنباله برابر ۱۸− است، مقادیر جملات پنجم و هفتم را به کمک جملهٔ سوم به دست می‌آوریم:

$$a_5=a_3\times r^2\Rightarrow a_5=-18\times9=-162$$
$$a_7=a_3\times r^4\Rightarrow a_7=-18\times81=-1458$$

پس $a_5-a_7=-162-(-1458)=1296$ است.

۳۰۵ **گزینه ۴** می‌دانیم جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ هندسی به صورت $a_n=a_1\times r^{n-1}$ است. طبق فرض مسئله، $a_1=1458$ و $r=\frac{1}{3}$ است؛ پس داریم: $a_n=1458(\frac{1}{3})^{n-1}$

هم‌چنین طبق فرض مسئله $a_n=2$ است؛ پس می‌توان نوشت:

$$1458\times(\frac{1}{3})^{n-1}=2\Rightarrow(\frac{1}{3})^{n-1}=\frac{2}{1458}=\frac{1}{729}\Rightarrow 3^{n-1}=729$$

از طرفی با توجه به این‌که $729=3^6$ است، داریم:

$$3^{n-1}=3^6\Rightarrow n-1=6\Rightarrow n=7$$

۳۰۶ **گزینه ۳** در دنبالهٔ هندسی $y,\underbrace{x-1}_{a},\underbrace{x}_{b},\underbrace{x+2}_{c},z$، شرط تشکیل دنبالهٔ هندسی را برای a,b,c می‌نویسیم:

$$b^2=ac\Rightarrow x^2=(x-1)(x+2)\Rightarrow \cancel{x^2}=\cancel{x^2}+x-2\Rightarrow x=2$$

حالا با جای‌گذاری $x=2$ در دنباله، جملات به صورت $y,1,2,4,z$ خواهد بود. با توجه به این‌که نسبت‌مشترک دنباله برابر تقسیم دو جملهٔ متوالی یعنی $r=\frac{2}{1}=2$ است. می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{y}=2\Rightarrow y=\frac{1}{2}\\ \frac{z}{4}=2\Rightarrow z=8\end{array}\right\}\Rightarrow xyz=2\times\frac{1}{2}\times8=8$$

۳۰۷ **گزینه ۴** در دنبالهٔ هندسی $\underbrace{x-\frac{3}{2}}_{a},y,\underbrace{x}_{b},z,\underbrace{4x}_{c}$، جملات a,b,c با فاصلهٔ یکسان هستند (جملهٔ اول، جملهٔ سوم و جملهٔ پنجم)؛ پس شرط تشکیل دنبالهٔ هندسی را برای آن‌ها می‌نویسیم:

$$b^2=ac\Rightarrow x^2=(x-\frac{3}{2})4x\Rightarrow x^2=4x^2-6x$$
$$\Rightarrow 3x^2-6x=0\Rightarrow 3x(x-2)=0\Rightarrow x=0,x=2$$

حالا با توجه به این‌که به ازای $x=0$، دنبالهٔ هندسی تشکیل نمی‌شود، $x=2$ را در جملات دنباله جای‌گذاری کرده و شرط تشکیل دنبالهٔ هندسی را برای به دست آوردن y و z می‌نویسیم:

$$\frac{1}{2},y,2,z,8\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}y^2=\frac{1}{2}\times2=1\Rightarrow y=\pm1\\ z^2=2\times8=16\Rightarrow z=\pm4\end{array}\right.$$

در نتیجه داریم:

$$|x|+|y|+|z|=2+1+4=7$$

۳۰۸ **گزینه ۱** در دنبالهٔ هندسی $\frac{4}{3},a,b,c,\frac{1}{3},d,e,\dots$، جملهٔ اول $a_1=\frac{4}{3}$ و جملهٔ پنجم $a_5=\frac{1}{3}$ است؛ پس طبق فرمول جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی $(a_n=a_1r^{n-1})$ داریم:

$$a_5=\frac{1}{3}\Rightarrow a_1r^4=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{4}{3}r^4=\frac{1}{3}\Rightarrow r^4=\frac{1}{4}\Rightarrow r=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

در این دنباله e جملهٔ هفتم است، پس داریم:

$$e=a_7=a_1r^6=a_1r^4r^2=a_5r^2=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

۳۰۹ گزینه ۱ در هر دقیقه ۲۰ درصد از وزن شهاب‌سنگ کم می‌شود؛ پس قدرنسبت دنبالهٔ مربوط به وزن شهاب‌سنگ برابر است با:

$$r=\frac{100-k}{100}=\frac{100-20}{100}=\frac{4}{5}$$

پس جملهٔ عمومی مربوط به وزن شهاب‌سنگ برابر $a_n=15000\times(\frac{4}{5})^{n-1}$ است. با توجه به این‌که می‌خواهیم وزن شهاب‌سنگ را پس از ۳ دقیقه به دست آوریم باید a_4 را محاسبه کنیم. (دقت کنید که a_1 لحظهٔ ورود به جو در دقیقه صفر است.)

$$a_4=15000\times(\frac{4}{5})^3=15000\times\frac{64}{125}=15\times\overset{8}{\cancel{1000}}\times\frac{64}{\cancel{125}}$$
$$=15\times8\times64=7680$$

۳۱۰ گزینه ۳ روزانه ۲۰ درصد به دستمزد وی اضافه می‌شود؛ پس قدرنسبت این دنباله برابر است با:

$$r=\frac{100+k}{100}=\frac{100+20}{100}=1/2$$

پس جملهٔ عمومی مربوط به درآمدهای وی به صورت $a_n=1000\times(1/2)^{n-1}$ است؛ پس میزان دستمزد روز پنجم برابر است با:

$$a_5=a_1r^4=1000\times\underbrace{(1/2)^4}_{((1/2)^2)^2=(1/44)^2=2/0736}=1000\times2/0736=2073/6$$

۳۱۱ گزینه ۲ با توجه به خواستهٔ سؤال، به سراغ فرمول مجموع جملات دنبالهٔ هندسی می‌رویم:

$$\frac{\text{مجموع هشت جملهٔ اول}}{\text{مجموع چهار جملهٔ اول}}=\frac{S_8}{S_4}=\frac{r^8-1}{r^4-1}=\frac{\cancel{(r^4-1)}(r^4+1)}{\cancel{r^4-1}}=r^4+1$$

$$\xrightarrow{r=\sqrt{2}}(\sqrt{2})^4+1\Rightarrow\frac{S_8}{S_4}=4+1=5$$

۳۱۲ گزینه ۴ با توجه به این‌که در دنبالهٔ $\ldots,b,9,a,4$، $a_1=4$ و $a_3=9$ است، به کمک جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی می‌توان نوشت:

$$a_3=a_1r^2\xrightarrow[a_1=4]{a_3=9}9=4r^2\Rightarrow r^2=\frac{9}{4}\Rightarrow r=\pm\frac{3}{2}$$

اما طبق فرض مسئله یک دنبالهٔ هندسی صعودی داریم؛ پس $r=\frac{3}{2}$ قابل قبول است و مجموع شش جملهٔ ابتدایی این دنباله برابر است با:

$$S_6=\frac{a_1(1-r^6)}{1-r}=\frac{4(1-(\frac{3}{2})^6)}{1-\frac{3}{2}}=\frac{4(1-\frac{729}{64})}{-\frac{1}{2}}=8(\frac{729}{64}-1)$$
$$=8(\frac{665}{64})=\frac{665}{8}=83\frac{1}{8}$$

۳۱۳ گزینه ۳ اگر بین ۲ و $16\sqrt{2}$، شش عدد دیگر قرار دهیم که تشکیل دنبالهٔ هندسی بدهند، آن‌گاه $a_1=2$ و $a_8=16\sqrt{2}$ است و می‌توان نوشت: $(\underbrace{2}_{a_1},\ldots,\ldots,\ldots,\ldots,\ldots,\ldots,\underbrace{16\sqrt{2}}_{a_8})$

$$\frac{a_8}{a_1}=\frac{a_1r^7}{a_1}=r^7=\frac{16\sqrt{2}}{2}=8\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow r^7=8\sqrt{2}=(\sqrt{2})^6\sqrt{2}=(\sqrt{2})^7\Rightarrow r=\sqrt{2}$$

در نتیجه طبق فرمول مجموع جملات دنبالهٔ هندسی، مجموع این هشت جمله برابر است با:

$$S_8=\frac{a(1-r^8)}{1-r}=\frac{2(1-(\sqrt{2})^8)}{1-\sqrt{2}}=\frac{2(1-16)}{1-\sqrt{2}}=\frac{30}{\sqrt{2}-1}$$

حالا با گویاکردن مخرج این کسر گزینهٔ درست را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{30}{\sqrt{2}-1}\times\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=\frac{30(\sqrt{2}+1)}{2-1}=30(\sqrt{2}+1)$$

۳۱۴ گزینه ۴ در یک دنبالهٔ هندسی مجموع سه جملهٔ اول ۱۳۶ و مجموع شش جملهٔ اول ۱۵۳ است؛ پس: $\frac{S_3}{S_6}=\frac{136}{153}=\frac{8}{9}$

حالا با جای‌گذاری رابطهٔ مربوط به S_3 و S_6 داریم:

$$\begin{cases}S_3=a_1\times\frac{1-r^3}{1-r}=136\\ S_6=a_1\times\frac{1-r^6}{1-r}=153\end{cases}\Rightarrow\frac{S_3}{S_6}=\frac{\cancel{a_1}\times\frac{1-r^3}{\cancel{1-r}}}{\cancel{a_1}\times\frac{1-r^6}{\cancel{1-r}}}=\frac{1-r^3}{1-r^6}=\frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{1+r^3}=\frac{8}{9}\Rightarrow r^3=\frac{1}{8}\Rightarrow r=\frac{1}{2}$$

پس نسبت جملهٔ اول به جملهٔ پنجم برابر است با:

$$\frac{a_1}{a_5}=\frac{a_1}{a_1r^4}=\frac{1}{r^4}=\frac{1}{(\frac{1}{2})^4}=16$$

۳۱۵ گزینه ۲ طبق فرض مسئله مجموع هشت جملهٔ اول $\frac{5}{4}$ برابر مجموع چهار جملهٔ اول است؛ پس به کمک فرمول $S_n=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ می‌توان نوشت:

$$S_8=\frac{5}{4}S_4\Rightarrow\frac{\cancel{a_1}(1-r^8)}{\cancel{1-r}}=\frac{5}{4}\times\frac{\cancel{a_1}(1-r^4)}{\cancel{1-r}}$$

$$\Rightarrow1-r^8=\frac{5}{4}(1-r^4)\Rightarrow(1-r^4)(1+r^4)=\frac{5}{4}(1-r^4)$$

$$\Rightarrow1+r^4=\frac{5}{4}\Rightarrow r^4=\frac{1}{4}\Rightarrow r^2=\frac{1}{2}$$

در نتیجه نسبت جملهٔ هفتم به جملهٔ اول برابر است با:

$$\frac{a_7}{a_1}=\frac{ar^6}{a}=r^6=(r^2)^3=(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$$

۳۱۶ گزینه ۲ طبق فرض مسئله $a_2=\frac{1}{2}$ و $a_5=4$ است، با تقسیم آن‌ها بر هم مقدار r را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}a_2=a_1r=\frac{1}{2}\\ a_5=a_1r^4=4\end{cases}\Rightarrow\frac{a_5}{a_2}=\frac{a_1r^4}{a_1r}=r^3=\frac{4}{\frac{1}{2}}=8\Rightarrow r=2$$

باجای‌گذاری $r=2$، در رابطهٔ مربوط به جملهٔ دوم، حاصل a_1 را به دست می‌آوریم:

$$a_2=a_1r=\frac{1}{2}\Rightarrow a_1\times2=\frac{1}{2}\Rightarrow a_1=\frac{1}{4}$$

حالا حاصل مجموع هشت جملهٔ اولیهٔ دنباله را به کمک رابطهٔ $S_n=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ به دست می‌آوریم:

$$S_8=\frac{\frac{1}{4}(1-(2)^8)}{1-2}=\frac{\frac{1}{4}\times(-255)}{-1}=\frac{255}{4}=63/75$$

۳۱۷ گزینه ۱ اگر بین ۴ و ۹۷۲، چهار جمله قرار دهیم که تشکیل دنبالهٔ هندسی دهند $a_1=4$ و $a_6=972$ است.

$$(\underbrace{4}_{a_1},\ldots,\ldots,\ldots,\ldots,\underbrace{972}_{a_6})$$

پس طبق جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی $(a_n=a_1r^{n-1})$ داریم:

$$a_6=972\Rightarrow a_1r^5=972\xrightarrow{a_1=4}4\times r^5=972$$

$$\Rightarrow r^5=243=3^5\Rightarrow r=3$$

حالا مجموع شش جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی را به کمک رابطهٔ $S_n=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ به دست می‌آوریم:

$$S_6=\frac{4(1-3^6)}{1-3}=\frac{\cancel{4}^{-2}(1-729)}{\cancel{-2}}=(-2)\times(-728)=1456$$

۳۱۸ گزینهٔ ۳ طبق فرض مسئله $a_n=7$ است، با داشتن $a_1=224$ و $r=\frac{1}{2}$، می‌توان نوشت:

$$a_n=a_1\times r^{n-1}\Rightarrow 7=224\times(\frac{1}{2})^{n-1}\Rightarrow \frac{7}{224}=(\frac{1}{2})^{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{32}=(\frac{1}{2})^{n-1}\Rightarrow(\frac{1}{2})^5=(\frac{1}{2})^{n-1}\Rightarrow n-1=5\Rightarrow n=6$$

حالا به کمک فرمول $S_n=\frac{a_1(r^n-1)}{(r-1)}$ مجموع این شش جمله را می‌نویسیم:
$(n=6\,,a_1=224\,,r=\frac{1}{2})$

$$S_6=\frac{a_1(r^6-1)}{r-1}=\frac{224((\frac{1}{2})^6-1)}{\frac{1}{2}-1}=\frac{224\times(\frac{1}{64}-1)}{-\frac{1}{2}}=441$$

۳۱۹ گزینهٔ ۳ طبق فرض مسئله مجموع ۱۰ جملهٔ اول $(4\sqrt{2}+1)$ برابر مجموع ۵ جملهٔ اول است؛ پس می‌توان نوشت:

$$\frac{S_{10}}{S_5}=1+4\sqrt{2}\xrightarrow{\frac{S_{2n}}{S_n}=1+r^n}1+r^5=1+4\sqrt{2}\Rightarrow r^5=4\sqrt{2}$$

حالا نسبت مجموع ۲۰ جملهٔ دوم بر مجموع ۲۰ جملهٔ اول برابر است با:

$$\frac{\overbrace{S_{40}-S_{20}}^{\text{مجموع ۲۰ جملهٔ دوم}}}{S_{20}}=r^{20}=(r^5)^4=(4\sqrt{2})^4=1024$$

۳۲۰ گزینهٔ ۱ اگر x,y,z سه جملهٔ متوالی دنباله‌ای حسابی با اختلاف‌مشترک d باشند، آن‌گاه $x=y-d$ و $z=y+d$ خواهد بود؛ از طرفی طبق فرض مسئله مجموع این سه عدد برابر ۲۱ است، پس داریم:

$$x+y+z=21\Rightarrow y-d+y+y+d=21\Rightarrow y=7$$

از طرفی جملات $x+6,y+4,z+2$ $(y-d+6,y+4,y+d+2)$ تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهند، $y=7$ را در آن‌ها جای‌گذاری کرده و جملات را بازنویسی می‌کنیم:

$$x+6,y+4,z+2\Rightarrow 7-d+6,7+4,7+d+2$$

$$\Rightarrow 13-d,11,9+d$$

حالا شرط تشکیل دنبالهٔ هندسی را برای آن‌ها می‌نویسیم:

$$11^2=(13-d)(9+d)\Rightarrow 121=117+13d-9d-d^2$$

$$\Rightarrow d^2-4d+4=0\Rightarrow d=2$$

در نتیجه داریم:

$$x=y-d=5\,,y=7\,,z=y+d=9\Rightarrow [\frac{xy}{z}]=[\frac{5\times7}{9}]=3$$

۳۲۱ گزینهٔ ۴ با توجه به این‌که z,y,x سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ هندسی هستند، اگر r نسبت‌مشترک این دنبالهٔ هندسی باشد، می‌توانیم جملات را به صورت x و xr، xr^2 در نظر بگیریم:
از طرفی طبق فرض مسئله جملات $x,3y,5z$ تشکیل دنبالهٔ حسابی داده‌اند، بنابراین می‌توانیم مقادیر z و y را از فرض دنبالهٔ هندسی جای‌گذاری کرده و شرط تشکیل دنبالهٔ حسابی را بنویسیم:

$$x,3y,5z\Rightarrow x,3xr,5xr^2\Rightarrow 6xr=x+5xr^2$$

حالا با توجه به این‌که دنبالهٔ هندسی x,y,z (x,xr,xr^2) نابرابر هستند، $(x\neq0)$ می‌توانیم با ساده کردن x از طرفین این معادله، مقدار r را به دست آوریم:

$$6r=1+5r^2\Rightarrow 5r^2-6r+1=0\Rightarrow\begin{cases}r=1 & \text{غ ق ق}\\ r=\frac{1}{5}\end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$[\frac{x}{z}]=[\frac{x}{xr^2}]=[\frac{1}{\frac{1}{25}}]=25$$

۳۲۲ گزینهٔ ۴ جملات دوم، پنجم و دوازدهم از یک دنبالهٔ حسابی، به صورت $a_2=a_1+d$، $a_5=a_1+4d$ و $a_{12}=a_1+11d$ است.
حال با توجه به این‌که این سه مقدار، جملات متوالی دنباله‌ای هندسی هستند، شرط تشکیل دنبالهٔ هندسی را برای آن‌ها می‌نویسیم:

$$a_5^2=a_2.a_{12}\Rightarrow(a_1+4d)^2=(a_1+d)\times(a_1+11d)$$

$$\Rightarrow a_1^2+8a_1d+16d^2=a_1^2+12a_1d+11d^2\Rightarrow 5d^2=4a_1d$$

$$\xrightarrow{d\neq0}5d=4a_1\Rightarrow a_1=\frac{5}{4}d$$

با جای‌گذاری این رابطه در جملات دوم و پنجم آن‌ها را بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases}a_2=a_1+d\\a_5=a_1+4d\end{cases}\xrightarrow{a_1=\frac{5}{4}d}\begin{cases}a_2=\frac{5}{4}d+d=\frac{9}{4}d\\a_5=\frac{5}{4}d+4d=\frac{21}{4}d\end{cases}$$

در نتیجه $\frac{21}{4}d$ و $\frac{9}{4}d$ دو جملهٔ متوالی دنبالهٔ هندسی هستند؛ پس قدرنسبت این دنباله برابر است با:

$$q=\frac{a_5}{a_2}=\frac{\frac{21}{4}d}{\frac{9}{4}d}=\frac{21}{9}=\frac{7}{3}$$

۳۲۳ گزینهٔ ۲ سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ هندسی را می‌توانیم به شکل a و ar، ar^2 در نظر بگیریم، طبق فرض مسئله جملات $4a,8ar,16ar^2$ جملات متوالی دنبالهٔ حسابی هستند؛ بنابراین با استفاده از شرط تشکیل دنبالهٔ حسابی، مقدار r را پیدا می‌کنیم:

$$2(8ar)=4a+16ar^2\Rightarrow 16ar=4a+16ar^2$$

$$\xrightarrow{\div4a}4r=1+4r^2\Rightarrow 4r^2-4r+1=0$$

$$\xrightarrow{\div4}r^2-r+\frac{1}{4}=0\Rightarrow(r-\frac{1}{2})^2=0\Rightarrow r=\frac{1}{2}$$

از طرفی مجموع مربعات سه جملهٔ هندسی برابر مجموع سه جملهٔ حسابی است؛ پس داریم:

$$a^2+(ar)^2+(ar^2)^2=4a+8ar+16ar^2$$

$$\Rightarrow a^2(1+r^2+r^4)=4a(1+2r+4r^2)$$

$$\Rightarrow a^2(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16})=4a(1+1+1)$$

حالا با توجه به این‌که $a\neq0$ است می‌توانیم آن را از طرفین ساده کنیم؛ پس داریم:

$$a\times\frac{16+4+1}{16}=12\Rightarrow a=\frac{12\times16}{21}\Rightarrow a=\frac{64}{7}$$

۳۲۴ گزینهٔ ۲ جملات پنجم، سوم و نهم یک دنبالهٔ حسابی به شکل $a_5=a+4d$، $a_3=a+2d$ و $a_9=a+8d$ می‌باشد.
طبق فرض مسئله جملهٔ پنجم، واسطهٔ هندسی جملات سوم و نهم است؛ پس می‌توان نوشت:

$$a_5^2=a_3a_9\Rightarrow(a+4d)^2=(a+2d)(a+8d)$$

$$\Rightarrow a^2+8ad+16d^2=a^2+10ad+16d^2$$

$$\Rightarrow 2ad=0\xrightarrow{d\neq0}a=0$$

حالا با توجه به این‌که جملهٔ پنجم دنباله برابر ۷ است، داریم:

$$a_{۵}=۷ \Rightarrow a+۴d=۷ \Rightarrow ۰+۴d=۷ \Rightarrow d=\frac{۷}{۴}$$

در نتیجه جملهٔ صد و یکم دنباله برابر است با:

$$a_{۱۰۱}=a+۱۰۰d=۰+۱۰۰\times\frac{۷}{۴}=۱۷۵$$

۳۲۵ گزینه ۲ برای حل، توان‌های منفی مخرج را به صورت و توان‌های منفی صورت را به مخرج می‌بریم تا با توان‌های مثبت سروکار داشته باشیم و کارمان راحت‌تر باشد:

$$\frac{(-y)^{-۲}.x^{۳}}{(-x^{-۲}.y)^{-۳}.x^{-۲}}=\frac{\overbrace{(-x^{-۲}.y)^{۳}}^{\text{توان را اعمال می‌کنیم.}}.x^{۳}.x^{۲}}{(-y)^{۲}}=\frac{-x^{-۶}y^{۳}.x^{۵}}{y^{۲}}$$

$$=\frac{-y^{۳}.x^{۵}}{x^{۶}.y^{۲}}=\frac{-y}{x}$$

۳۲۶ گزینه ۳ تک‌تک اعداد داده‌شده را به شکل توان‌هایی از ۲ می‌نویسیم:

$$۲^{۰/۷۶}=۲^{\frac{۷۶}{۱۰۰}}\ ,\ ۴^{۰/۱۲}=(۲^{۲})^{\frac{۱۲}{۱۰۰}}=۲^{\frac{۲۴}{۱۰۰}}\ ,\ ۸^{-\frac{۱}{۳}}=(۲^{۳})^{-\frac{۱}{۳}}=۲^{-۱}$$

در نتیجه حاصل عبارت داده‌شده برابر است با:

$$۲^{۰/۷۶}\times۴^{۰/۱۲}\times۸^{-\frac{۱}{۳}}=۲^{\frac{۷۶}{۱۰۰}}\times۲^{\frac{۲۴}{۱۰۰}}\times۲^{-۱}=۲^{(\frac{۷۶}{۱۰۰}+\frac{۲۴}{۱۰۰}-۱)}=۲^{۰}=۱$$

۳۲۷ گزینه ۳ هر یک از عبارت‌ها را ساده می‌کنیم و سپس حاصل عبارت نهایی را پیدا می‌کنیم:

$$(۰/۰۴)^{۲}=(۴\times۱۰^{-۲})^{۲}=(۲^{۲}\times۱۰^{-۲})^{۲}=۲^{۴}\times۱۰^{-۴}$$

$$(۶۲۵)^{-۲}=(۵^{۴})^{-۲}=۵^{-۸}$$

$$(\frac{۱}{۵})^{-۴}=(۵^{-۱})^{-۴}=(۵)^{۴}$$

$$(۰/۰۰۸)^{۳}=(۸\times۱۰^{-۳})^{۳}=(۲^{۳}\times۱۰^{-۳})^{۳}=۲^{۹}\times۱۰^{-۹}$$

بنابراین حاصل عبارت نهایی برابر است با:

$$\frac{(۰/۰۴)^{۲}\times(۶۲۵)^{-۲}}{(\frac{۱}{۵})^{-۴}\times(۰/۰۰۸)^{۳}}=\frac{۲^{۴}\times۱۰^{-۴}\times۵^{-۸}}{۵^{۴}\times۲^{۹}\times۱۰^{-۹}}=\frac{۱}{۲^{۵}\times۱۰^{-۵}\times۵^{۱۲}}$$

$$=\frac{۱}{۲^{۵}\times(۲\times۵)^{-۵}\times۵^{۱۲}}=\frac{۱}{\cancel{۲^{۵}}\times\cancel{۲^{-۵}}\times۵^{-۵}\times۵^{۱۲}}=\frac{۱}{۵^{۷}}=(\frac{۱}{۵})^{۷}$$

۳۲۸ گزینه ۳ هر یک از عبارت‌ها را جداگانه ساده می‌کنیم:

- $(۰/۲۵)^{۴}=(\frac{۲۵}{۱۰۰})^{۴}=(\frac{۱}{۴})^{۴}=(۲^{-۲})^{۴}=۲^{-۸}$
- $(\frac{۳}{۴})^{-۳}=(\frac{۴}{۳})^{۳}=(\frac{۲^{۲}}{۳})^{۳}=\frac{۲^{۶}}{۳^{۳}}$
- $۶^{۴}=(۲\times۳)^{۴}=۲^{۴}\times۳^{۴}$

حالا کافی است مقادیر به‌دست‌آمده را در یکدیگر ضرب کنیم و حاصل را به دست آوریم:

$$(۰/۲۵)^{۴}\times(\frac{۳}{۴})^{-۳}\times۶^{۴}=۲^{-۸}\times\frac{۲^{۶}}{\cancel{۳^{۳}}}\times۲^{۴}\times\cancelto{۳}{۳^{۴}}=\underbrace{۲^{-۸+۶+۴}}_{۲^{۲}}\times۳$$

$$=۴\times۳=۱۲$$

۳۲۹ گزینه ۱ پایهٔ تمام اعداد با هم برابر است؛ پس برای محاسبهٔ حاصل‌ضرب آن‌ها باید یکی از پایه‌ها را نوشته و توان‌ها را با هم جمع کنیم:

$$۳^{\frac{۱}{۴}}\times۳^{\frac{۱}{۸}}\times۳^{\frac{۱}{۱۶}}\times\dots\times۳^{\frac{۱}{۲۵۶}}=۳^{(\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۳۲}+\frac{۱}{۶۴}+\frac{۱}{۱۲۸}+\frac{۱}{۲۵۶})}$$

با کمی دقت می‌فهمیم توان‌ها تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهند که جملهٔ اول آن‌ها $\frac{۱}{۴}$ و قدر نسبت آن‌ها نیز $\frac{۱}{۲}$ است؛ بنابراین مجموع آن‌ها را می‌یابیم.

$$\left.\begin{array}{l}a_{۱}=\frac{۱}{۴}\\ r=\frac{۱}{۲}\\ n=۷\end{array}\right\}\xrightarrow{S_n=\frac{a(r^n-۱)}{r-۱}} S_{۷}=\frac{\frac{۱}{۴}\overbrace{((\frac{۱}{۲})^{۷}-۱)}^{\frac{۱}{۱۲۸}-۱=\frac{-۱۲۷}{۱۲۸}}}{\underbrace{\frac{۱}{۲}-۱}_{-\frac{۱}{۲}}}=$$

$$=\frac{\cancelto{\frac{-۱}{۲}}{\frac{۱}{۴}}\times\frac{-۱۲۷}{۱۲۸}}{-\cancel{\frac{۱}{۲}}}=\frac{۱۲۷}{۲۵۶}$$

پس حاصل عبارت داده‌شده برابر $۳^{\frac{۱۲۷}{۲۵۶}}$ است.

۳۳۰ گزینه ۱ با کمی دقت متوجه می‌شویم که در طرفین این تساوی، پایه‌ها فقط می‌توانند توانی از ۲ و ۳ شوند، $۹=۳^{۲}$ و $۳۶=۳^{۲}\times۲^{۲}$ و $۸=۲^{۳}$ و $۳=۳^{۱}$؛ بنابراین هر یک از اعداد را تا حد امکان ساده کرده و در طرفین تساوی، اعداد توان‌دار با پایه‌های یکسان تشکیل می‌دهیم:

$$۹=۳^{۲}\ ,\ ۳۶^{۳}=(۶^{۲})^{۳}=((۲\times۳)^{۲})^{۳}=۲^{۶}\times۳^{۶}\ ,$$

$$(\frac{۸}{۳})^{-۲}=(\frac{۲^{۳}}{۳})^{-۲}=\frac{۲^{-۶}}{۳^{-۲}}$$

با جای‌گذاری آن‌ها در معادله داریم:

$$۹^{x+۴}=(۳۶)^{۳}\times(\frac{۸}{۳})^{-۲}\Rightarrow(۳^{۲})^{x+۴}=۲^{۶}\times۳^{۶}\times\frac{۲^{-۶}}{۳^{-۲}}\quad(۲^{۰}=۱)$$

$$\Rightarrow ۳^{۲x+۸}=۳^{۸}$$

با توجه به این‌که پایه‌ها با هم برابرند، توان‌ها را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$۲x+۸=۸\Rightarrow۲x=۰\Rightarrow x=۰$$

۳۳۱ گزینه ۴ ابتدا اعداد داده‌شده در معادله را به شکل توان‌هایی از ۳ می‌نویسیم: $۸۱=۳^{۴}\ ,\ ۹=۳^{۲}\ ,\ \frac{۱}{۳}=۳^{-۱}$

حالا معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$(۸۱)^{-۱}\times۹^{x-۱}=(-\frac{۱}{۳})^{x}\Rightarrow۳^{-۴}\times۳^{۲x-۲}=(-۳)^{-x}$$

$$\Rightarrow۳^{۲x-۶}=(-۳)^{-x}$$

حالت اول: اگر x عددی زوج باشد، آن‌گاه ۳^{-x} و $(-۳)^{-x}$ با هم برابر هستند:

$$۳^{۲x-۶}=۳^{-x}\Rightarrow۲x-۶=-x\Rightarrow۳x=۶\Rightarrow x=۲\ ✓$$

حالت دوم: اگر x عددی فرد باشد، آن‌گاه $(-۳)^{-x}=-۳^{-x}$ است و داریم:

$$\underbrace{۳^{۲x-۶}}_{\text{همواره مثبت است.}}=\underbrace{-۳^{-x}}_{\text{همواره منفی است.}}\Rightarrow$$ معادله جواب ندارد.

۳۳۲ گزینه ۱ هر کدام از صورت و مخرج کسر را جداگانه به صورت یک عدد توان‌دار می‌نویسیم:

- $۳^{\frac{۱}{۴}}\times۳^{\frac{۱}{۸}}\times۹^{\frac{۱}{۳۲}}\times۹^{\frac{۱}{۶۴}}=۳^{\frac{۱}{۴}}\times۳^{\frac{۱}{۸}}\times(۳^{۲})^{\frac{۱}{۳۲}}\times(۳^{۲})^{\frac{۱}{۶۴}}$

$$=۳^{\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۳۲}}=۳^{\frac{۱۵}{۳۲}}$$

- $۳^{\frac{۱}{۲}}\times۴^{\frac{۱}{۲}}\times۳^{\frac{۳}{۸}}\times۴^{\frac{۳}{۸}}=(۳\times۴)^{\frac{۱}{۲}}\times(۳\times۴)^{\frac{۳}{۸}}=۱۲^{\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۸}}=۱۲^{\frac{۷}{۸}}$